Spirale de Cornu

On se propose dans ce problème d'étudier la courbe Γ admettant, par rapport à un repère orthonormal du plan la représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos\left(u^2\right)\mathrm{d}u \\ y(t) = \int_0^t \sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Cette courbe est appelée spirale de Cornu au encore clothoïde.
On note $M(t)$ le point de Γ de paramètre t.

1.a La courbe Γ admet-elle des éléments de symétries ?

1.b Pour quelles valeurs de t, le point $M(t)$ est-il régulier ? birégulier ?

1.c Etudier γ au voisinage du point $M(0)$.

1.d Etudier les variations sur de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\mathbb{R}^+$.
Pour quelles valeurs de t la tangente en $M(t)$ est-elle verticale ? horizontale ?

1.e On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.
Donner l'allure l'arc Γ.

2. Déterminer en fonction de t :

2.a l'abscisse curviligne s d'origine $M(0)$,

2.b la distance curviligne entre les points $M(t_0)$ et $M(t_1)$ avec $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$,

2.c les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ du repère de Frénêt au point $M(t)$,

2.d la courbure λ au point $M(t)$ lorsque $t \neq 0$.

3. Pour tout réel k non nul donné, on considère la courbe $\mathcal{C}_k$ régulière de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :
+ O est le point origine des abscisses curvilignes.
+ En O, le vecteur tangent de la base de Frénêt égal à $\vec{i}$
+ En tout point, on a $\lambda = ks$ où s est l'abscisse curviligne et λ la courbure.

3.a Donner le paramétrage de $\mathcal{C}_k$ en fonction du paramètre s.

3.b Comment la courbe $\mathcal{C}_k$ se déduit-elle de la courbe Γ ?

Rq : *Si la jonction de deux segments d'autoroutes était réalisée par un arc de cercle de rayon R, la courbure passerait subitement de 0 à $1/R$. L'accélération normale passerait alors « instantanément » d'une valeur nulle à une valeur significative. Pour éviter ce problème, dans la pratique, on joint deux segments en exploitant la spirale de Cornu. En effet, elle permet de passer régulièrement d'une courbure nulle à toute valeur donnée.*