Parties orthocentriques

Le plan géométrique est supposé rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle *triangle* tout ensemble formé de trois points non alignés du plan.

Partie I : Orthocentre

1. Soit ABC un triangle du plan

1.a Etablir que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0 .$$

En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H appelé *orthocentre* de ce triangle.

1.b Justifier l'existence d'un cercle unique passant par les points A,B,C .

1.c Soit Ω le centre du cercle défini ci-dessus et K le point déterminé par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\Omega K}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C} .$$

Etablir que K est l'orthocentre H du triangle ABC .
En déduire que les points Ω,H et le point G , isobarycentre des points A,B,C , sont alignés.

2. Soit A,B et C les points de coordonnées $(1,4)$, $(-2,-3)$ et $(4,-1)$.

Justifier que A,B,C ne sont pas alignés et déterminer les coordonnées des points Ω,H,G définis ci-dessus.

3. Etant donnés deux points A et B du plan et un point H , à quelle(s) condition(s) existe t'il un unique triangle dont A et B en soient sommets et H orthocentre ?

Partie II : Partie orthocentrique

Etant donnée une partie X formée de points du plan non tous alignés, on dira que la partie X est *orthocentrique* ssi tout orthocentre d'un triangle de points de X appartient à X .

1. Dans cette question, on s'intéresse aux parties orthocentriques finies.

1.a Déterminer les parties orthocentriques à 3 éléments.

1.b Soit ABC un triangle non rectangle et D son orthocentre.
Montrer que $\{A,B,C,D\}$ est une partie orthocentrique à quatre éléments

1.c Existe t'il d'autres parties orthocentriques formées de quatre points ?

1.d Donner un exemple de partie orthocentrique formée de cinq points ?

2. Montrer que la réunion de deux droites orthogonales est une partie orthocentrique.

3. Soit k un réel non nul et X l'hyperbole d'équation $xy=k$.

3.a Soit A,B,C,D quatre points distincts de X d'abscisses respectives a,b,c,d . Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ssi $abcd=-k^2$.

3.b Soit A,B,C trois points distincts de X d'abscisses respectives a,b,c .
Montrer que ABC forme un triangle et en déterminer l'orthocentre.

3.c Montrer que X est orthocentrique.