Algorithme de Babylone

L'objectif de ce problème est de présenter deux suites de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$ puis de comparer leur vitesse de convergence.
Les parties I et II sont totalement indépendantes, la partie III les exploitent toutes les deux.

Partie I – Première suite

On considère les suites réelles (p_n) et (q_n) définies par $\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$.

1.a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont entiers strictement positifs.

1.b Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq q_n$.

2. On définit une suite réelle (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

2.a Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2.b Justifier que $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.

2.c En déduire la limite de la suite (u_n).

3.a Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+2} = ap_{n+1} + bp_n$.

3.b En déduire l'expression du terme général de la suite (p_n).

3.c De même exprimer le terme général de la suite (q_n).

3.d Retrouver le résultat de la question I.2.c

Partie II – Deuxième suite

On considère la suite réelle (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini et est un nombre rationnel de l'intervalle $[1,2]$.

2. Observer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}$.

3. En déduire que $v_n \to \sqrt{2}$.

Partie III – Comparaison des vitesses de convergence

1. Donner les valeurs décimales approchées de u_3, v_3 et $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-3}.

2. On pose $t_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

2.a Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n, u_n et v_n.

2.b En déduire la limite de la suite (t_n).

Quelle est celle des deux suites (u_n) et (v_n) qui converge le plus rapidement vers $\sqrt{2}$?