Supplémentaire commun à deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On se donne A et B deux sous-espaces vectoriels de E et on se pose le problème suivant :
A quelle(s) condition(s) existe-t-il un sous-espace vectoriel C tel que : $A+B=A\oplus C=B\oplus C$.

1. Dans cette question on suppose que le sous-espace vectoriel C existe.
Montrer que $\dim A=\dim B$ et déterminer $\dim C$.

Dans la suite de notre étude, nous allons supposer $\dim A=\dim B$ et montrer que le sous-espace vectoriel C existe.

2. On étudie pour commencer le cas où A et B seraient deux hyperplans distincts.

2.a Justifier l'existence de vecteurs $\vec{u}\in A$ et $\vec{v}\in B$ tels que $\vec{u}\notin B$ et $\vec{v}\notin A$.

2.b Etablir que $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\notin A\cup B$.

2.c Observer que $C=\text{Vect}(\vec{w})$ est solution du problème posé.

3. On revient au cas général et on suppose seulement $\dim A=\dim B$

3.a Résoudre le problème posé lorsque $A=B$
Dans la suite, on suppose $A\neq B$.

3.b Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel A' tel que $(A\cap B)\oplus A'=A$.
De manière symétrique, on introduit B' sous-espace vectoriel tel que $(A\cap B)\oplus B'=B$.

3.c Montrer que $A'\cap B'=\{\vec{o}\}$ et $\dim A'=\dim B'\in\mathbb{N}^*$.
Dans la suite, on pose $p=\dim A'=\dim B'$.

3.d Justifier l'existence de bases $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ et $\mathcal{C}=(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p)$ aux sous-espaces vectoriels A' et B'.

4. On reprend les objets introduits ci-dessus afin de construire un sous-espace vectoriel C solution.
On forme $\mathcal{D}=(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_p)$ en posant, pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$, $\vec{g}_i=\vec{e}_i+\vec{f}_i$.

4.a Montrer que la famille $\mathcal{D}$ est libre.

4.b On pose $C=\text{Vect}(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_p)$.
Déterminer $\dim C$.

4.c Montrer que $A\cap C=\{\vec{o}\}$.

4.d Conclure que $A+B=A\oplus C=B\oplus C$.