Exponentielle de matrice

On note $M_p(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées réelles d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$.

Partie I

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $M_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice 3 si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Dans cette partie, on note A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice 3. On note I la matrice unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = I + t.A + \dfrac{t^2}{2}.A^2$.

1. Vérifier la relation : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t)$.
2. En déduire que $(E(t))^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $M_p(\mathbb{R})$.
5. En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $M_p(\mathbb{R})$, est injective.
6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Expliciter $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

Partie II

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_e = (e_1, e_2)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associée.

1. Montrer que $F = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur ε_1 de F, et un vecteur directeur ε_2 de G.
2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B}_\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre 2) telles que $A = PDP^{-1}$.

   Expliciter P, D et P^{-1}.
4. Expliciter D^n pour tout n entier naturel. Démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$.

   En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Partie III

On reprend les notations de la partie II.
On se propose dans cette partie de déterminer toutes les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

1. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$, vérifiant $M^2 = D$.

   Montrer que $MD = DM$ et en déduire que M est diagonale.
   Quels peuvent être ses coefficients diagonaux ?
2. Soit $X \in M_2(\mathbb{R})$ .En étudiant $M = P^{-1}XP$, déterminer une écriture des matrices X solutions de l'équation $X^2 = A$. On ne demande pas de calculer explicitement les coefficients de X.
3. On note $X_1, \ldots, X_m$ les solutions de l'équation $X^2 = A$.

   Sans calculer explicitement ces m solutions, déterminer leur somme $S = X_1 + \cdots + X_m$ et leur produit $P = X_1 \ldots X_m$.

Partie IV

On reprend les notations de la partie II.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel t, on a :

   $\mathrm{e}^t = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right)$.

2. Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$.

   On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

   Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t), b_n(t), c_n(t), d_n(t)$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ avec $a(t) = \lim_{n \to +\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n \to +\infty} b_n(t)$, etc. Expliciter $E(t)$.

   Réponse partielle : on obtient $a(t) = 3\mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^t$.

4. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que :

   $\forall t \in \mathbb{R}, E(t) = \mathrm{e}^{2t}.Q + \mathrm{e}^t.R$.

   Expliciter Q et R.

5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ.

   Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R ?
   On pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question II.1.

6. En déduire que $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t)$.

   Que dire que $(E(t))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$? de $(E(t))^{-1}$?

   L'application $E : t \mapsto E(t)$ de $\mathbb{R}$ vers $M_2(\mathbb{R})$ est-elle injective ?