Déterminant de Gram

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(.\,|\,.)$

Partie I

1. Soit u et v deux vecteurs quelconques de E.

   On notre $Gram(u,v)=\begin{pmatrix}(u\,|\,u) & (u\,|\,v)\\ (v\,|\,u) & (v\,|\,v)\end{pmatrix}$ et $G(u,v)=\det(Gram(u,v))$.

   Montrer que $G(u,v)\geq 0$. A quelle condition y a-t-il égalité ?

2. Soit u,v et w trois vecteurs quelconques de E.

   On note $Gram(u,v,w)=\begin{pmatrix}(u\,|\,u) & (u\,|\,v) & (u\,|\,w)\\ (v\,|\,u) & (v\,|\,v) & (v\,|\,w)\\ (w\,|\,u) & (w\,|\,v) & (w\,|\,w)\end{pmatrix}$ et $G(u,v,w)=\det(Gram(u,v,w))$.

2.a On suppose que w est orthogonal à u et v.
Exprimer $G(u,v,w)$ en fonction de $G(u,v)$.

2.b On suppose que w est combinaison linéaire de u et v.
Calculer $G(u,v,w)$.

2.c On suppose que $w=t+n$ avec t combinaison linéaire de u et v, et n orthogonal à u et v.
Montrer que $G(u,v,w)=G(u,v)\|n\|^2$.

2.d Etablir l'équivalence : (u,v,w) est libre $\Leftrightarrow$ $G(u,v,w)\neq 0$.

Partie II

Soit $u_1,\dots,u_n$ n vecteurs de E.
On note : $Gram(u_1,\dots,u_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indice (i,j) est $(u_i\,|\,u_j)$ et $G(u_1,\dots,u_n)$ le déterminant de celle-ci.

1. On suppose la famille $(u_1,\dots,u_n)$ liée. Montrer que $G(u_1,\dots,u_n)=0$.

2. On suppose la famille $(u_1,\dots,u_n)$ libre. On introduit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par $u_1,\dots,u_n$ et on note $A=(a_{i,j})$ la matrice de passage de la base $(e_1,\dots,e_n)$ à la base $(u_1,\dots,u_n)$.

2.a Exprimer $(u_i\,|\,u_j)$ à l'aide des coefficients de la matrice A.

2.b Montrer que $Gram(u_1,\dots,u_n)={}^tAA$. En déduire que $G(u_1,\dots,u_n)>0$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F.

   On appelle distance de x vecteur de E au sous-espace vectoriel F le réel : $d(x,F)=\inf\limits_{y\in F}\|x-y\|$.

3.a En écrivant $x=x_F+n$ avec $x_F\in F$ et $n\in F^\perp$, démontrer que $d(x,F)=\|n\|$.

3.b Etablir : $d(x,F)=\sqrt{\dfrac{G(e_1,\dots,e_p,x)}{G(e_1,\dots,e_p)}}$.

Partie III

1. Pour tout polynôme P et Q de $\mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

   Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Désormais, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $(P\mid Q)$ au lieu de $\varphi(P,Q)$ le produit scalaire de deux éléments P et Q de $\mathbb{R}[X]$.

2.a On désire calculer $d=\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^1 (t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t$.

Interpréter d à l'aide de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E à préciser.

2.b Calculer les déterminants $\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}$.

2.c Donner la valeur de d .

Partie IV

Soit p un entier naturel non nul et $a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p$ des réels tels que pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$, $a_i>0$, $b_i\geq 0$ et pour tout $i\neq j\in\{1,\dots,p\}$, $b_i\neq b_j$.

Le but de cette partie est de calculer le déterminant de la matrice :

$$\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq p}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_p}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{a_p+b_1} & \frac{1}{a_p+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_p}\end{pmatrix}\in M_p(\mathbb{R}).$$

Ce déterminant sera noté $C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)$.

1. Soit $F(X)=\dfrac{(X-a_1)\cdots(X-a_{p-1})}{(X+b_1)\cdots(X+b_p)}$.

   Réaliser la décomposition en éléments simples de F .

2. On note D le déterminant d'ordre p :

$$D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & F(a_1)\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & F(a_2)\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & F(a_p)\end{vmatrix}.$$

   En calculant D de deux façons, établir :

$$F(a_p)C_{p-1}(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1})=\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p).$$

3. En déduire : $C_p(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)=\dfrac{\prod_{1\leq i<j\leq p}(a_j-a_i)\prod_{1\leq i<j\leq p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq p}(a_i+b_j)}$.

4.a Calculer $\Delta_p = \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{2p-1} \end{vmatrix} \in M_p(\mathbb{R})$.

On pourra se contenter d'une expression comportant un ou plusieurs $\prod(\ldots)$.

4.b En déduire la valeur de $u_n = \inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0\right)^2 \mathrm{d}t$.

On exprimera le résultat à l'aire de nombres factoriels.

4.c Quelle est la limite de (u_n) ?