Cœur et nilespace d'un endomorphisme

Notations et rappels

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
Un sous-espace vectoriel V de E est dit stable par u lorsque pour tout $\vec{x} \in V$, on a $u(\vec{x}) \in V$.
Lorsque qu'un sous-espace vectoriel V est stable par u, on peut considérer la restriction de u à V notée $u_{|V} : V \to V$. Il est clair que $u_{|V}$ est un endomorphisme de V.

Pour $n \in \mathbb{N}$, u^n désigne l'endomorphisme définit par récurrence par :

$u^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u \circ u^n$ (où Id désigne l'endomorphisme identité de E).

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \operatorname{Im} u^n$ et $G_n = \ker u^n$.

1.a Par quel argument simple peut-on affirmer que F_n et G_n sont des sous-espaces vectoriels de E ?

1.b Montrer que les suites de sous-espaces vectoriels (F_n) et (G_n) sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion.

2. On pose $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ et $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$.

2.a Etablir que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2.b Montrer que F et G sont stables par u.

2.c Déterminer F et G lorsque u est un automorphisme de E.

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+1} = F_n$.

3.a Etablir que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{n+p} = F_n$.

3.b Justifier de l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+1} = F_n$.
Celui-ci sera désormais noté $r(u)$.
A quel terme de la suite (F_n) est égal F ?

3.c Observer $E = F + G_{r(u)}$.

4. Dans cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_{n+1} = G_n$.

4.a Etablir que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $G_{n+p} = G_n$.

4.b Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_{n+1} = G_n$.
Celui-ci sera désormais noté $s(u)$.
A quel terme de la suite (G_n) est égal G ?

4.c Observer $F_{s(u)} \cap G = \{\vec{o}\}$.

5.a On suppose qu'il existe un entier n tel que $F_n = F_{n+1}$ et $G_{n+1} = G_{n+2}$.
Montrer que $G_n = G_{n+1}$.

5.b On suppose qu'il existe un entier n tel que $G_n = G_{n+1}$ et $F_{n+1} = F_{n+2}$.
Montrer que $F_n = F_{n+1}$.

6. On dit que l'endomorphisme u est de caractère fini lorsqu'il existe un entier r et un entier s tel que $F_r = F_{r+1}$ et $G_s = G_{s+1}$. On suppose que u est de caractère fini.

6.a Montrer que $r(u) = s(u)$.

6.b Etablir que F et G sont supplémentaires dans E.

6.c Montrer que les restrictions de u à F et G sont respectivement bijectives et nilpotentes.