Calculs de déterminants

Dans tout le problème a, b, c désignent des réels et n un entier supérieur à 1.

Partie I

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :

les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, ceux au dessus de la cette diagonale valent b et enfin ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi : $\Delta_1 = |a|$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}$.

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

2.a Calculer Δ_n dans les cas $a = c$ et $a = b$.

2.b Calculer Δ_n dans le cas où $b = c$.

3. On suppose $b \neq c$ et $n \geq 3$.

3.a Etablir que $\Delta_n - (2a - b - c)\Delta_{n-1} + (a-b)(a-c)\Delta_{n-2} = 0$.
On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes.

3.b Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$.

Partie II

Dans cette partie $a_1, \ldots, a_n$ désignent n réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :

Les coefficients diagonaux sont les $a_1, \ldots, a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b tandis que ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi $D_1 = |a_1|$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$.

1. Dans un premier temps, nous supposons $b \neq c$.
On pose $D_n(x)$, le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n.

Ainsi $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}$.

1.a Montrer que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction affine, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x) = \alpha x + \beta$.

1.b Calculer α et β en évaluant $D_n(x)$ pour des valeurs judicieuses de x.

1.c En déduire l'expression de D_n.

2. On désire calculer D_n dans le cas où $b = c$.

2.a On fixe le paramètre c et on fait varier le paramètre b dans $\mathbb{R}$. Etablir que D_n apparaît alors comme une fonction continue de la variable b variant dans $\mathbb{R}$.

2.b En déduire la valeur de D_n dans le cas où $b = c$.