Calculs à l'intérieur d'une sous algèbre matricielle

$(M_3(\mathbb{R}),+,\times,.)$ désigne la $\mathbb{R}$ algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Pour tout triplet (a,b,c) de nombres réels, on note $T(a,b,c)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $F=\left\{T(a,b,c)\mid(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

On pose $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
Préciser une base de F et sa dimension.

2.a Exprimer A^2,B^2,AB et BA à l'aide de I, A et B.

2.b Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$, $M=T(a,b,c)$ et $M'=T(a',b',c')$.
Calculer le produit MM'.

2.c Montrer que F est une sous-algèbre de $M_3(\mathbb{R})$.
Est-elle commutative ?

2.d $(F,+,\times)$ est-il un corps ?

3. Cette question est consacrée à la recherche des éléments inversibles de l'algèbre F.
On fixe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et on pose $M=T(a,b,c)$.

3.a Calculer le déterminant de la matrice M et factoriser le résultat.

3.b On reprend les notations de la question 2.b.
Calculer, lorsque c'est possible, les réels a',b',c' à l'aide de a,b,c pour que $MM'=I$.

3.c Quels sont les éléments inversibles de F ?

Partie II

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et (e_1,e_2,e_3) est une base orthonormée directe de E.

1.a Montrer que $T(a,b,c)$ est une matrice orthogonale ssi $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ b^2+2ac=0 \\ b(a+c)=0 \end{cases}$.

1.b En déduire toutes les matrices orthogonales appartenant à F.
Préciser, parmi ces matrices celles dont le déterminant est positif.

2. On note u l'endomorphisme de E de matrice B dans la base (e_1,e_2,e_3).
Reconnaître u, et préciser ses caractéristiques géométriques.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et v l'endomorphisme de matrice C dans (e_1, e_2, e_3).

Reconnaître v, et préciser ses éléments géométriques.

Partie III

Dans cette partie, on pose $K = \frac{1}{\sqrt{2}} A$ et $M = T(1, \sqrt{2}, 0)$. On se propose de calculer les puissances de K, puis celles de M.

1. Calculer K^2, K^3, puis K^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) en distinguant les cas n pair et n impair.
2. Exprimer M à l'aide de I et de K et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = I + a_n K + b_n K^2$

   avec $a_n = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^k$ et $a_n = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^k$.
3. Calculer $1 + a_n + b_n$, puis $1 - a_n + b_n$.

   En déduire a_n et b_n en fonction de n.