Homographies conservant U

Notations

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
On introduit les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants :
$U=\left\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\right\}=\left\{\mathrm{e}^{i\theta}/\theta\in\mathbb{R}\right\}$, $P=\{z\in\mathbb{C}/\operatorname{Im}(z)>0\}$ et $D=\{z\in\mathbb{C}/|z|<1\}$.

Définition

Soit $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ tels que $ad-bc\neq 0$.
On appelle homographie définie par la relation $h(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ l'application h à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui à tout $z\in\mathbb{C}$ tels que $cz+d\neq 0$ associe par $\dfrac{az+b}{cz+d}$.

Partie I - Exemple

Soit h l'homographie définie par $h(z)=i\dfrac{1+z}{1-z}$.

1.a Montrer que $\forall z\in U$ tel que $z\neq 1$, $h(z)\in\mathbb{R}$.

1.b Observer que $\forall z\in D, h(z)\in P$.

2.a Déterminer les complexes z tels que $h(z)=z$.

2.b Pour quel(s) $Z\in\mathbb{C}$ l'équation $h(z)=Z$ d'inconnue $z\neq 1$ possède-t-elle une solution ?

Soit g l'homographie définie par $g(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$.

3.a Montrer que $\forall z\in\mathbb{R}, g(z)\in U$.

3.b Observer que $\forall z\in P, g(z)\in D$.

Partie II - Homographies conservant U

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}$.
Montrer que $\forall z\in U, h(z)\in U$.

2. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $\alpha\notin U$, $\theta\in\mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z)=\mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$.

2.a Montrer que h est bien une homographie et que h est définie sur U.

2.b Montrer que $\forall z\in U, h(z)\in U$.

3. Inversement, nous allons démontrer que seules les homographies h précédentes sont telles que $\forall z\in U, h(z)\in U$. Avant cela, nous avons néanmoins besoin de deux résultats techniques :

3.a Etablir que $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}, |\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2+2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta)$.

3.b Soit $a,b\in\mathbb{C}$. Etablir : $\left(\forall\theta\in\mathbb{R}, a+2\operatorname{Re}(b\mathrm{e}^{-i\theta})=0\right)\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$.

4. Soit $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ tels que $ad-bc\neq 0$ et h définie par $h(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie définie sur U telle que $\forall z\in U, h(z)\in U$.

4.a Etablir $\forall\theta\in\mathbb{R}, |a|^2+|b|^2+2\operatorname{Re}(\overline{a}b\mathrm{e}^{-i\theta})=|c|^2+|d|^2+2\operatorname{Re}(\overline{c}d\mathrm{e}^{-i\theta})$.

4.b En déduire : $\begin{cases}|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2\\ \overline{a}b=\overline{c}d\end{cases}$.

4.c Si $a=0$: montrer que l'homographie h est du type présenté en II.1.

4.d Si $a\neq 0$: établir que $(|a|^2-|c|^2)(|a|^2-|d|^2)=0$.

4.e Observer que le cas $|a|=|c|$ est impossible de part la condition $ad-bc\neq 0$.

4.f Observer que le cas $|a|=|d|$ conduit à une homographie h du type présenté en II.2.