# Calcul de cosinus par radicaux

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer :

$$\cos\frac{\pi}{5} \text{ et } \cos\frac{\pi}{17}$$

à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés.

## *Partie I : Calcul de* $\cos\frac{\pi}{5}$

Soit l'équation :

$$(E) : z^5 - 1 = 0 .$$

1. Résoudre $(E)$ dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de $(E)$ sous forme trigonométrique.

2. On va maintenant résoudre $(E)$ par radicaux carrés :

2.a Déterminer la fonction polynomiale $Q$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$$

2.b Déterminer des réels $a, b, c$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ :

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c$$

2.c Résoudre, en exprimant les solutions par radicaux carrés, l'équation :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

2.d Pour finir, résoudre l'équation

$$Q(z) = 0$$

en exprimant les solutions par radicaux carrés, éventuellement superposés.

3. Des questions précédentes, déduire des expressions par radicaux de :

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5} \text{ et } \sin\frac{\pi}{5} .$$

## *Partie II : Calcul de* $\cos\frac{\pi}{17}$

1. On désigne par $a$ et $h$ deux réels et par $n$ un entier naturel non nul.
On pose :

$$C(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh) \text{ et } S(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh) .$$

1.a On suppose $\sin\frac{h}{2} = 0$.
Calculer $C(a,h)$ et $S(a,h)$ en fonction de $a$ et de $n$.

1.b On suppose $\sin\frac{h}{2} \neq 0$.
Etablir les formules :

$$C(a,h) = \frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}} \text{ et } S(a,h) = \frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}} .$$

On pourra pour cela évaluer $C(a,h) + iS(a,h)$ mais cette méthode n'est toutefois pas imposée.

2. Dans cette question, et les suivantes, $\theta$ désigne le réel $\pi/17$ .

On pose :

$$x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta$$

$$x_2 = \cos\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta$$

2.a Montrer que $x_1 > 0$ .

2.b Calculer la somme $x_1 + x_2$ en s'aidant du résultat de la question II.1.b.

On trouvera pour résultat un nombre rationnel simple.

2.c Calculer le produit $x_1 x_2$ . On devra pour cela :

i) développer le produit des deux sommes $x_1$ et $x_2$ .

ii) appliquer au résultat obtenu la formule linéarisant le produit $\cos a \cos b$

iii) en conclure $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$ .

2.d Déduire de ce qui précède des expressions de $x_1$ et $x_2$ par radicaux carrés.

3. On pose ici :

$$y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta$$

$$y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta$$

$$y_3 = \cos\theta + \cos 13\theta$$

$$y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta$$

3.a Calculer en s'inspirant la question précédente les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$ .

3.b En déduire les expressions de $y_1, y_2, y_3, y_4$ à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

4. Calculer $\cos\theta \cos 13\theta$ et décrire une méthode qui permette d'exprimer $\cos\theta$ à l'aide de radicaux carrés.

Après résolution, non demandée, on obtient :

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}}\right)$$