Algèbre de Boole

Dans l'intégralité de ce problème, E désigne un ensemble.

On appelle algèbre de Boole sur l'ensemble E, toute partie $\mathcal{A}$ de $\wp(E)$ telle que :

(1) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

(2) $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$ (où $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans E) et

(3) $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$.

1. Propriétés élémentaires :

Dans cette question $\mathcal{A}$ désigne une algèbre de Boole sur E.

1.a Montrer que $E \in \mathcal{A}$.

1.b Etablir : $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

2. Quelques exemples :

2.a Donner un exemple simple d'algèbre de Boole sur E.

2.b Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ une partition de E.

On considère $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in I} E_i \;/ I \subset \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole.

2.c Ici $E = \mathbb{R}$.

On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble formé par les réunions d'un nombre fini d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole sur $\mathbb{R}$.

On rappelle au passage que l'ensemble vide est considéré être un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. Endomorphisme d'algèbre de Boole

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole sur E.

On appelle endomorphisme de $\mathcal{A}$ toute application $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telle que :

(1) $\forall A \in \mathcal{A}, f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ et

(2) $\forall A, B \in \mathcal{A}, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3.a Justifier que $f(E) = E$ et $f(\varnothing) = \varnothing$.

3.b Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{A}, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ et $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

3.c Etablir aussi $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

3.d On note $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{A} / f(A) = \varnothing\}$ appelé noyau de f.

Montrer que f est injective si et seulement si $\mathcal{K} = \{\varnothing\}$.

4. Description des algèbres de Boole finies.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole sur E.

4.a On définit une relation binaire notée $\mathcal{R}$ sur E par : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}, x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Pour $x \in E$, nous noterons $Cl(x)$ la classe d'équivalence de x modulo la relation $\mathcal{R}$, celle-ci est appelée atome de l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ engendré par l'élément x.

4.b Soit $x \in E$. On note $\mathcal{A}_x = \{X \in \mathcal{A} / x \in X\}$. Etablir que $Cl(x) = \bigcap_{X \in \mathcal{A}_x} X$.

4.c On suppose que $\mathcal{A}$ est constitué d'un nombre fini d'éléments.

4.c.i Montrer que $\mathcal{A}$ contient chacun de ses atomes.

4.c.ii Montrer que chaque élément de $\mathcal{A}$ peut s'écrire comme une réunion finie d'atomes.

Par suite $\mathcal{A}$ se perçoit comme étant du type vu en 2.b.