

Travaux d'*affinement* et de *perfectionnement*

Du raisonnement *Mathématique*

problème 1 - vers la seconde - prouesses techniques

Le but de cet exercice est de montrer que pour tous les nombres a, b et c :

$$\left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

est un entier.

1. Montrer que $\left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \left(1 + \frac{a}{b+c}\right)$ peut s'écrire sous la forme $\frac{A}{(a+b)(b+c)}$ où A est une expression développée et réduite.

2. En déduire une écriture de :

$$\left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right)$$

sous la forme $\frac{B}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ dans laquelle B est une expression développée et réduite.

3. En déduire que :

$$\left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

est un nombre entier.

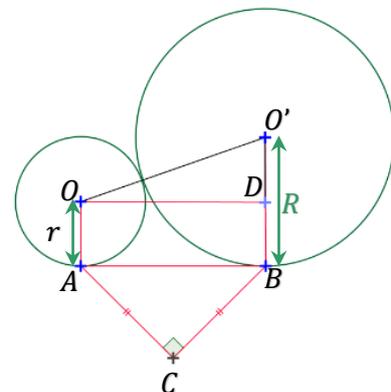
problème 2 - vers la seconde - une histoire de minima

1. Après avoir développé $(x + 5)^2$, expliquer pourquoi $(x + 5)^2 > 10x$, quel que soit le nombre x choisi.
2. Montrer que $(x + 5)^2 + 3 = x^2 + 10x + 28$ et en déduire que pour tout nombre x , $x^2 + 10x + 28$ ne peut pas être inférieur à 3.

problème 3 - vers la seconde - une histoire de minima

Dans la figure ci-dessous, les deux cercles de centres O et O' sont tangents à la droite (AB) et tangents entre eux. Le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en C .

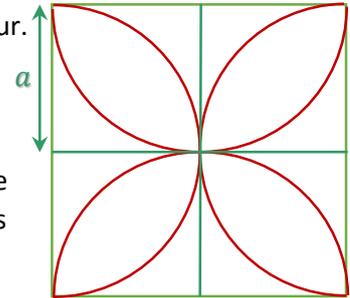
1. Citer, en justifiant, tous les angles droits de la figure.
2. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de la longueur AB .
3. En déduire l'expression réduite de l'aire du triangle ABC en fonction de r et de R .



Les exercices qui suivants doivent être traités sans calculatrice.

perf 1 – flowers

On souhaite réaliser en papier peint un motif en forme de fleur sur un mur. Ce motif est représenté ci-contre.



Pour fabriquer une pétale, on prend des feuilles de papier peint de forme carrée de côté a et trace deux quarts de cercles de centres les extrémités d'une diagonale du carré et de rayon a .

Elle fabrique une fleur en regroupant quatre pétales.

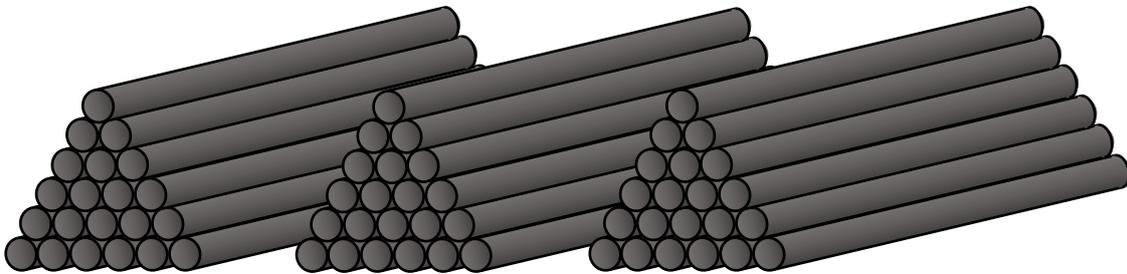
1. Calculer, en fonction de a , l'aire des chutes de papier lorsqu'un pétale aura été découpé dans une feuille.
2. Calculer, en fonction de a , l'aire d'un pétale de cette fleur.

perf 2 – souplesse

Montrer que la différence de l'inverse d'un nombre entier non nul et de l'inverse de celui qui le succède est égale à l'inverse du produit de ces nombres.

perf 3 – empilement

1. Comment empiler 88 tubes en faisant des pyramides de tubes comme ci-dessous ?



2. Combien de pyramides peut-on faire dans ce cas-là ?
3. Combien y a-t-il de lignes de tubes dans chaque pyramide ?

perf 4 – l'énigme

La différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 8.