

Travaux d'affinement et de perfectionnement

Du raisonnement *Mathématique*

problème 1 - niveau seconde - nombres de fermat

Un nombre de Fermat est un entier n naturel qui peut s'écrire sous la forme $2^{2^n} + 1$, avec n entier. Ces nombres doivent leur nom au Mathématicien Pierre de Fermat (1601 – 1665).

1. On note F_0 le nombre de Fermat obtenu en remplaçant n par 0 dans la formule précédente. Vérifier que $F_0 = 3$.
2.
 - a) De même, on note F_1 et F_2 les nombres de Fermat obtenus en remplaçant respectivement n par 1 et n par 2 dans la formule. Vérifier que $F_1 = 5$ et que $F_2 = 17$.
 - b) Calculer F_3, F_4 et F_5 .
3.
 - a) Vérifier que $F_3 = F_0 \times F_1 \times F_2 + 2$.
 - b) Vérifier que $F_4 = F_0 \times F_1 \times F_2 \times F_3 + 2$.
 - c) Vérifier que $F_5 = F_0 \times F_1 \times F_2 \times F_3 \times F_4 + 2$.
4. Fermat pensait que tous ces nombres étaient des nombres premiers. Or seuls les cinq premiers le sont. Vérifier que F_5 est divisible par 641.

problème 2 - niveau seconde - système solaire

Toutes les planètes du système solaire tournent sur elle-même.

Le tableau ci-dessous donne le diamètre et la durée d'une rotation de chaque planète :

Nom	Diamètre équatorial (en km)	Durée d'une rotation
<i>Mercury</i>	$4,88 \times 10^3$	58 jours 15 h 38 min
<i>Venus</i>	$1,21 \times 10^4$	243 jours 00 h 14 min
<i>Terre</i>	$1,27 \times 10^4$	23 h 56 min
<i>Mars</i>	$6,80 \times 10^3$	24 h 37 min
<i>Jupiter</i>	$1,43 \times 10^5$	09 h 53 min
<i>Saturne</i>	$1,20 \times 10^5$	10 h 24 min
<i>Uranus</i>	$5,10 \times 10^4$	15 h 30 min
<i>Neptune</i>	$4,95 \times 10^4$	16 h 07 min

1. Lucco habite au Brésil. Sa maison est située exactement sur l'équateur de la Terre. En utilisant les données du tableau précédent, calculer la vitesse de Lucco due à la rotation de la Terre. Répondre en km/h arrondi à l'unité près.
2. Pour chaque planète, on considère un point situé sur l'équateur. Calculer la vitesse de chacun de ces points engendrés par la rotation de ces planètes. Répondre en km/h arrondi à l'unité près.

Les exercices qui suivants doivent être traités sans calculatrice.

perf 1 – côte à côte

Classer les entiers de 1 à 15 de façon que la somme de deux entiers placés côte à côte soit toujours le carré d'un entier.

perf 2 – recherche d'unités

1. Quel est le chiffre des unités de 7^{777} ?
2. Quel est le chiffre des unités de 13^{2012} ?

perf 3 – trois nombres

Paul doit effectuer le calcul $(a + b) \div c$.

Il sait que la réponse correcte est 15. Mais il oublie les parenthèses et trouve 21.

Voyant qu'il s'est trompé, il intervertit a et b , calcule $(a + b) \div c$, mais il oublie à nouveau mes parenthèses et obtient 24.

Quels sont les trois nombres a , b et c ?

Exercice extrait du championnat de Jeux Mathématiques et logiques.

perf 4 – arbre généalogique

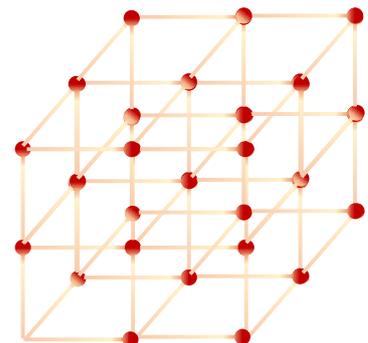
1. Je veux faire mon arbre généalogique contenant mes deux parents (première génération), mes quatre grands-parents (deuxième génération) jusqu'à mes ancêtres de la cinquième génération. Combien cet arbre comporte-t-il de personnes (en me comptant) ?
2. On numérote ainsi les membres de l'arbre :
 - Je porte le numéro 1
 - Mon père le numéro 2 et ma mère le numéro 3
 - Les parents du numéro n sont numérotés $2n$ pour le père et $2n + 1$ pour la mère (exemple : le père de mon père porte le numéro 4).

En respectant ce modèle et en utilisant les mots **père, mère de, la, du, mon**, préciser qui porte le numéro 37.

Exercice extrait du Rallye Mathématique d'Auvergne.

perf 5 – cube d'allumettes

1. La figure ci-contre représente un cube en allumettes fait de $2^3 = 8$ petits cubes identiques. Combien faut-il d'allumettes pour le réaliser ?
2. On veut construire un plus grands cube dans lequel il y aurait $10^3 = 1\,000$ petits cubes identiques. Combien faudra-t-il d'allumettes pour le réaliser ?



perf 6 - mind

Quel est le nombre de chiffres de l'écriture entière du nombre $2^{25} \times 5^{19}$?

perf 7 - l'énigme

Pour combien d'entiers x la fraction $\frac{10x+1}{2x-1}$ est-elle égale à un nombre entier ?