Evaluation 7 – CALCULS ELEMENTAIRES SUR LES RADICAUX – Sujet A

Exercice 1 – [2pts]

On considère les expressions suivantes

$$A = 2\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600} \quad ; \quad B = \frac{4\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$$

a) Ecrire A sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers et b est le plus petit possible.

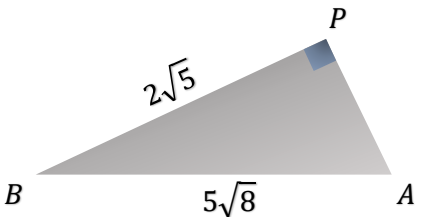
$A = 2\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600}$
$= 2\sqrt{4} \times \sqrt{6} + \sqrt{16} \times \sqrt{6} - \sqrt{100} \times \sqrt{6}$
$= 4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 10\sqrt{6}$
$= (4 + 4 - 10)\sqrt{6}$
$= -2\sqrt{6}$

b) Simplifier B au maximum.

$B = \frac{4\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = 4\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{\frac{72}{2}} = 4\sqrt{36} = 4 \times 6 = 24$.

Exercice 2 – [2pts]

Le triangle ZAP est rectangle en P, calculer la valeur exacte de AP.



Dans le triangle ABP rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = AP^2 + PB^2$
alors $AP^2 = AB^2 - BP^2 = \left(5\sqrt{8}\right)^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 25 \times 8 - 4 \times 5 = 200 - 20 = 180$
ainsi $AP > 0$ donc $AP = \sqrt{180} = \sqrt{36} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

Exercice 3 – [3pts]

a) Démontrer que $\left(2\sqrt{3} + 1\right)\left(2\sqrt{3} - 1\right)$ est un nombre entier.

On a $\left(2\sqrt{3} + 1\right)\left(2\sqrt{3} - 1\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 1^2 = 4 \times 3 - 1 = 12 - 1 = 11$.
Et $11 \in \mathbb{N}$.]Q. E. D. [

b) Utiliser le résultat précédent pour donner une écriture fractionnaire du nombre $\frac{3}{2\sqrt{3}+1}$ mais sans radical au dénominateur.

On a $\frac{3}{2\sqrt{3}+1} = \frac{3}{2\sqrt{3}+1} \times \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1} = \frac{3\times(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)} = \frac{3\times(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{6\sqrt{3}-3}{4\times3-1} = \frac{6\sqrt{3}-3}{11}$.

Exercice 4 – [3pts]

Développer et réduire les expressions suivantes

$A = (5\sqrt{2} - 7)(5\sqrt{2} + 7)$
$= \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 7^2$
$= 25 \times 2 - 49$
$= 1$

$B = \left(3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}\right)^2$
$= \left(3\sqrt{5}\right)^2 + 2 \times 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{3} + \left(5\sqrt{3}\right)^2$
$= 9 \times 5 + 2 \times 3 \times 5\sqrt{5 \times 3} + 25 \times 3$
$= 45 + 30\sqrt{15} + 75$
$= 120 + 30\sqrt{15}$

$C = \left(5\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right)^2$
$= \left(5\sqrt{6}\right)^2 - 2 \times 5\sqrt{6} \times 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2$
$= 25 \times 6 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{6 \times 3} + 4 \times 3$
$= 150 - 20\sqrt{18} + 12$
$= 162 - 60\sqrt{2}$

Exercice Bonus – [2pts]

Montrer que $\sqrt{3 + \sqrt{8}} = 1 + \sqrt{2}$.

Posons $A = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$ et $B = 1 + \sqrt{2}$, comme A et B sont des nombres positifs, il suffit de montrer que $A^2 = B^2$.

- $A^2 = \sqrt{3 + \sqrt{8}}^2 = 3 + \sqrt{8} = 3 + \sqrt{4 \times 2} = 3 + \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$
- $B^2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Ainsi, $A^2 = B^2$ et comme de plus A et B sont positifs alors $A = B$.]Q. E. D. [

Evaluation 7 – CALCULS ELEMENTAIRES SUR LES RADICAUX – Sujet B

Exercice 1 – [2pts]

On considère les expressions suivantes

$$A = 3\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{700} \quad ; \quad B = \frac{3\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

a) Ecrire A sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers et b est le plus petit possible.

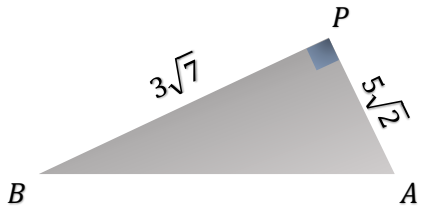
$A = 3\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{700}$
$= 3\sqrt{4} \times \sqrt{7} + \sqrt{9} \times \sqrt{7} - \sqrt{100} \times \sqrt{7}$
$= 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 10\sqrt{7}$
$= (6 + 3 - 10)\sqrt{7}$
$= -\sqrt{7}$

b) Simplifier B au maximum.

$B = \frac{3\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = 3\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\frac{98}{2}} = 4\sqrt{49} = 4 \times 7 = 28$.

Exercice 2 – [2pts]

Le triangle ZAP est rectangle en P, calculer la valeur exacte de AB.



Dans le triangle ABP rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = AP^2 + PB^2$
alors $AB^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{7}\right)^2 = 25 \times 2 + 9 \times 7 = 50 + 63 = 113$

Ainsi $AB > 0$ donc $AB = \sqrt{113}$.

Exercice 3 – [3pts]

a) Démontrer que $(4\sqrt{5} + 2)(4\sqrt{5} - 2)$ est un nombre entier.

On a $(4\sqrt{5} + 2)(4\sqrt{5} - 2) = \left(4\sqrt{5}\right)^2 - 2^2 = 16 \times 5 - 2 = 30 - 2 = 28$.
Et $28 \in \mathbb{N}$.]Q. E. D. [

b) Utiliser le résultat précédent pour donner une écriture fractionnaire du nombre $\frac{3}{4\sqrt{5}-2}$ mais sans radical au dénominateur.

On a $\frac{3}{4\sqrt{5}-2} = \frac{3}{4\sqrt{5}-2} \times \frac{4\sqrt{5}+2}{4\sqrt{5}+2} = \frac{3\times(4\sqrt{5}+2)}{(4\sqrt{5}-2)(4\sqrt{5}+2)} = \frac{3\times(4\sqrt{5}-2)}{\left(4\sqrt{5}\right)^2-2^2} = \frac{12\sqrt{5}-6}{4\times3-4} = \frac{12\sqrt{5}-6}{8} = \frac{6\sqrt{5}-3}{4}$.

Exercice 4 – [3pts]

Développer et réduire les expressions suivantes

$A = (5\sqrt{2} - 7)(5\sqrt{2} + 7)$
$= \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 7^2$
$= 25 \times 2 - 49$
$= 1$

$B = \left(3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}\right)^2$
$= \left(3\sqrt{5}\right)^2 + 2 \times 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{3} + \left(5\sqrt{3}\right)^2$
$= 9 \times 5 + 2 \times 3 \times 5\sqrt{5 \times 3} + 25 \times 3$
$= 45 + 30\sqrt{15} + 75$
$= 120 + 30\sqrt{15}$

$C = \left(5\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right)^2$
$= \left(5\sqrt{6}\right)^2 - 2 \times 5\sqrt{6} \times 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2$
$= 25 \times 6 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{6 \times 3} + 4 \times 3$
$= 150 - 20\sqrt{18} + 12$
$= 162 - 60\sqrt{2}$

Exercice Bonus – [2pts]

Montrer que $\sqrt{3 + \sqrt{8}} = 1 + \sqrt{2}$.

Posons $A = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$ et $B = 1 + \sqrt{2}$, comme A et B sont des nombres positifs, il suffit de montrer que $A^2 = B^2$.

- $A^2 = \sqrt{3 + \sqrt{8}}^2 = 3 + \sqrt{8} = 3 + \sqrt{4 \times 2} = 3 + \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$
- $B^2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Ainsi, $A^2 = B^2$ et comme de plus A et B sont positifs alors $A = B$.]Q. E. D. [

Evaluation 7 – CALCULS ELEMENTAIRES SUR LES RADICAUX – Sujet C

Exercice 1 – [1,5pt]

On considère les nombres suivants $A = 5\sqrt{8} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{18}$ et $B = \frac{\sqrt{800}}{\sqrt{8}}$.

a) En justifiant les calculs, donner A sous la forme $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$, où a et b sont deux entiers relatifs.

$A = 5\sqrt{8} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{18}$
$= 10\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$
$= 7\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$

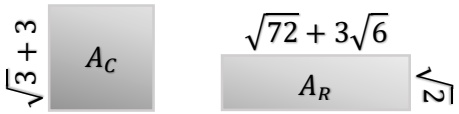
b) Simplifier B au maximum.

$B = \frac{\sqrt{800}}{\sqrt{8}} = \frac{10\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 10$

Exercice 2 – [4pts]

La mesure du côté du carré est $\sqrt{3} + 3$.

Les dimensions du rectangle sont $\sqrt{72} + 3\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$.



a) Calculer l'aire A_C du carré ; réduire l'expression obtenue.

$$A_C = \left(\sqrt{3} + 3\right)^2 = 3 + 6\sqrt{3} + 9 = 12 + 6\sqrt{3}$$

b) Calculer l'aire A_R du rectangle.

$$A_R = \sqrt{2} \times \left(\sqrt{72} + 3\sqrt{6}\right) = \sqrt{2} \times \left(6\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right) = 12 + 3\sqrt{12}$$

c) Montrer que $A_C = A_R$.

$$A_R = 12 + 3\sqrt{12} = 12 + 3\sqrt{4 \times 3} = 12 + 6\sqrt{3}$$

Ainsi, $A_C = A_R$.]Q. E. D. [

Exercice 3 – [2,5pts]

On donne le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre
- **Prendre la racine carrée de ce nombre**
- **Multiplier le nombre obtenu par 3**
- **Ajouter le carré du nombre choisi**
- **Diviser $\sqrt{30}$ par le nombre obtenu**

Ecrire le résultat

a) Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque le nombre choisi est 5.

$$\frac{\sqrt{5} \times 3 + 25}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5} \times 3 + 5\left(\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}(3 + 5\sqrt{5})}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = \frac{3 + 5\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

b) Ecrire ce nombre sans racine carré au dénominateur.

$$\frac{3 + 5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{3 + 5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + 5\sqrt{30}}{6}$$

Exercice 4 – [2pts]

Montre que $E = \left(\sqrt{7} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{7} - 1\right)^2$ est un nombre entier.

$E = \left(\sqrt{7} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{7} - 1\right)^2$
$= \sqrt{7}^2 + 2 \times \sqrt{7} \times 1 + 1^2 + \sqrt{7}^2 - 2 \times \sqrt{7} \times 1 + 1^2$
$= \sqrt{7}^2 + 2$
$= 9$ Et $9 \in \mathbb{N}$.]Q. E. D. [