

### Objectifs :

- Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide).
- Calculer le PGCD de deux entiers.
- Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.
- Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible

*Nota : Pour ce chapitre,  $a$  et  $b$  désigneront deux entiers positifs avec  $b$  non nul. Sauf mention immédiate du contraire.*

### I – Multiples et diviseurs

#### Définition

Effectuer la **division euclidienne** de  $a$  par  $b$ , c'est trouver le **quotient entier**  $q$  et le **reste entier**  $r$  tel que :  
 $a = bq + r$ , avec  $0 \leq r < b$ .

#### Exemple :

La division euclidienne de 985 par 65 donne :

$$\begin{array}{r|l} 985 & 65 \\ 335 & \mathbf{15} \text{ Quotient} \\ \hline \text{Reste } & \mathbf{10} \end{array}$$

On a :  $985 = 65 \times \mathbf{15} + \mathbf{10}$ .

#### Définition

Si le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  est nul, on peut écrire  $a = bq$ .  
Dans ce cas, on dit que  $b$  est un **diviseur** de  $a$  ou que  $a$  est **divisible** par  $b$ ,  
ou encore que  $a$  est un **multiple** de  $b$   
ou que  $b$  a pour **multiple**  $a$ .

#### Exemple :

$24 = 3 \times 8$ , donc 3 et 8 sont des diviseurs de 24 ou 24 est un multiple de 3 et 8.

### II – Diviseurs communs et PGCD

#### 1 – Définition et notation

#### Définition

Si  $a$  et  $b$  sont divisibles par un même entier  $d$ , on dit que  $d$  est un **diviseur commun** à  $a$  et  $b$ .  
On note **PGCD**( $a; b$ ) ou **PGCD**( $b; a$ ), le **plus grand des diviseurs communs** à  $a$  et  $b$ .

#### Exemple :

Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6 et 18.

Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Les diviseurs communs à 18 et 24 sont 1, 2, 3 et 6.

On a donc **PGCD**(18; 24) = 6.

## 2 – Propriétés du PGCD

### Propriétés

- $PGCD(a; a) = a$
- $PGCD(a; 0) = a$
- Si  $b$  divise  $a$ , alors  $PGCD(a; b) = b$

### Exemples :

- $PGCD(16; 16) = 16$
- $PGCD(15; 0) = 15$
- $PGCD(18; 9) = 9$

### Propriétés

- On considère  $a \geq b$ . Alors  $PGCD(a; b) = PGCD(a - b; b)$ .
- $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$  où  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

### Exemples :

- $PGCD(95; 35) = PGCD(95 - 35; 35) = PGCD(60; 35)$
- $32 = 5 \times 6 + 2$  donc  $PGCD(32; 5) = PGCD(5; 2)$

## III – Nombres premiers entre eux

### Définition

Deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.

### Exemple :

Les diviseurs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20.

Les diviseurs de 33 sont 1, 3, 11 et 33.

1 est le seul diviseur commun à 20 et 33, donc  $PGCD(20; 33) = 1$ .

Les nombres 20 et 33 sont donc premiers entre eux.

## IV – Fractions irréductibles

### Propriétés

Si  $a, b$  et  $c$  désignent des nombres entiers, avec  $b \neq 0$  et  $c \neq 0$ , alors  $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$ .

### Exemple :

$\frac{45}{25} = \frac{9 \times 5}{5 \times 5} = \frac{9}{5}$ . On a ainsi simplifié la fraction  $\frac{45}{25}$  par 5.

### Remarques

- On ne peut pas simplifier  $\frac{9}{5}$  car 9 et 5 n'ont pas de diviseur commun autre que 1.
- Pour simplifier une fraction, il est utile de connaître les critères de divisibilité.

### Définition

Une **fraction irréductible** est une fraction que l'on ne peut pas simplifier.

### Exemples :

- $\frac{12}{8}$  n'est pas une fraction irréductible. En effet, on peut la simplifier par 2.
- $\frac{4}{7}$  est une fraction irréductible. En effet, 4 et 7 n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

**Propriété**

Si une fraction a pour numérateur et dénominateur deux nombres premiers entre eux, alors cette fraction est irréductible.

Exemple :

$PGCD(15; 8) = 1$ , donc  $\frac{15}{8}$  et  $\frac{8}{15}$  sont des fractions irréductibles.

**Propriété**

Lorsque l'on simplifie une fraction par le  $PGCD$  du numérateur et du dénominateur, on obtient une fraction irréductible.

Exemple :

$$PGCD(396; 108) = 36$$

$$\frac{396}{108} = \frac{36 \times 11}{36 \times 3} = \frac{11}{3} \text{ et } \frac{11}{3} \text{ est donc une fraction irréductible.}$$