

Objectifs :

- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ;
- En donner une interprétation graphique.

I – Système d'équations

Définition : une équation du premier degré à deux inconnues est une égalité comportant deux inconnues désignées par deux lettres différentes dont les exposants sont égaux à 1.

Exemple : $2x + 3y = 10$ est une équation du premier degré à deux inconnues x et y .

Le couple $(-1; 4)$ est une des solutions de cette équation car $2 \times (-1) + 3 \times 4 = 10$.

Définition :

- **Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues** désignées par x et y est de la forme :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ avec } a, b, c, a', b', c' \text{ des nombres donnés.}$$
- **Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues**, c'est trouver le couple $(x; y)$ qui vérifie simultanément les deux équations.

Exemple :

Le système $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$ a pour solution le couple $(1; -2)$ car ce couple est solution des deux équations.

En effet, $2 \times 1 + 3 \times (-2) = -4$ et $4 \times 1 + (-2) = 2$.

II – Résolution graphique

Exemple : on veut interpréter graphiquement le couple-solution du système suivant : $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

- L'équation $3x + y = 9$ a les mêmes solutions que l'équation $y = -3x + 9$.

Les couples-solutions de cette équation sont les coordonnées des points appartenant à la représentation graphique Δ_f de la fonction affine définie par :

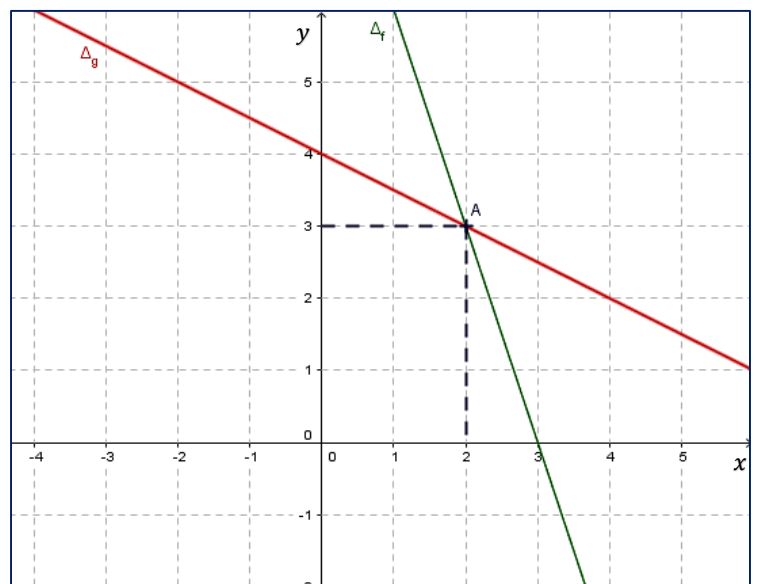
$$f(x) = -3x + 9$$

- De même, l'équation $2x + 4y = 16$ a les mêmes solutions que l'équation $y = -0,5x + 4$.

Les couples-solutions de cette équation sont les coordonnées des points appartenant à la représentation graphique Δ_g de la fonction affine définie par :

$$g(x) = -0,5x + 4$$

- On voit ici que les droites Δ_f et Δ_g semblent bien se couper au point A de coordonnées $(2; 3)$.
- On peut donc donner la solution du système par lecture graphique, c'est le couple $(2; 3)$.



III – Résolution algébrique

1) Résolution par substitution

Exemple : on considère le système (S) : $\begin{cases} 3x - y = -18 & (E_1) \\ 2x + 5y = 5 & (E_2) \end{cases}$

Etape 1 : choix d'une équation On choisit l'équation (E_1) car l'inconnue y a un coefficient -1 qui divise les autres coefficients de l'équation. On exprime alors y en fonction de x dans l'équation (E_1).	On a $\begin{cases} -y = -18 - 3x & (E_1) \\ 2x + 5y = 5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 18 + 3x \\ 2x + 5y = 5 \end{cases}$
Etape 2 : substitution Dans l'autre équation, on remplace y par $3x + 18$. On obtient une nouvelle équation d'inconnue x. On réduit cette équation.	donc $\begin{cases} y = 18 + 3x \\ 2x + 5 \times (18 + 3x) = 5 & (E_2) \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 18 + 3x \\ 2x + 90 + 15x = 5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 18 + 3x \\ 17x + 90 = 5 \end{cases}$
Etape 3 : résolution de l'équation obtenue On résout cette équation pour obtenir la valeur de x.	donc $\begin{cases} y = 18 + 3x \\ 17x = 5 - 90 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 18 + 3x \\ x = -\frac{85}{17} \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 18 + 3x \\ x = -5 \end{cases}$
Etape 4 : détermination de l'autre inconnue On remplace x par -5 dans l'expression $y = 3x + 18$, et on en déduit la valeur de y.	donc $\begin{cases} y = 18 + 3 \times (-5) \\ x = -5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 18 - 15 \\ x = -5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 3 \\ x = -5 \end{cases}$
Etape 5 : vérification dans (E_1) et (E_2)	On a : $\begin{cases} 3 \times (-5) - 3 = -18 \\ 2 \times (-5) + 5 \times 3 = 5 \end{cases}$
Etape 6 : conclusion	$(-5; 3)$ est le couple solution de (S).

2) Résolution par combinaisons linéaires

Exemple : on considère le système (S) : $\begin{cases} 5x - 2y = -19 & (E_1) \\ -4x + 6y = 24 & (E_2) \end{cases}$

Etape 1 : choix des coefficients multiplicateurs On souhaite éliminer une inconnue dans une des deux équations. On multiplie pour cela les deux membres de l'équation (E_1) par 3. On ne modifie pas l'équation (E_2).	$\begin{cases} 15x - 6y = -57 & 3 \times (E_1) \\ -4x + 6y = 24 & 1 \times (E_2) \end{cases}$ Les coefficients de y sont opposés
Etape 2 : Combinaison linéaire des équations (E_1) et (E_2) On ajoute membre à membre les deux équations obtenues. On obtient une nouvelle équation d'inconnue x. On conserve une des deux équations inchangée, ici (E_2).	$\begin{array}{rcl} 15x - 6y & = & -57 & 3 \times (E_1) \\ \oplus & -4x + 6y & = & 24 & 1 \times (E_2) \\ \hline 11x + 0y & = & -33 & 3(E_1) + (E_2) \end{array}$ donc $\begin{cases} 11x = -33 \\ -4x + 6y = 24 \end{cases}$
Etape 3 : résolution de l'équation obtenue On résout cette nouvelle équation pour obtenir la valeur de x.	donc $\begin{cases} x = -\frac{33}{11} = -3 \\ -4x + 6y = 24 \end{cases}$
Etape 4 : détermination de l'autre inconnue On remplace x par -3 dans l'autre équation et on en déduit la valeur de y.	donc $\begin{cases} x = -3 \\ -4 \times (-3) + 6y = 24 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$
Etape 5 : vérification dans (E_1) et (E_2)	On a : $\begin{cases} 5 \times (-3) - 2 \times 2 = -19 \\ -4 \times (-3) + 6 \times 2 = 24 \end{cases}$
Etape 6 : conclusion	$(-3; 2)$ est le couple solution de (S).