Chapitre 13 – INEQUATIONS

Objectifs :

- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques.
- Représenter ses solutions sur une droite graduée.

I – Vocabulaire et propriétés

- Une **inéquation** est une inégalité comportant une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres.
- Une **inéquation du premier degré** est une inégalité dont les membres (développés et réduits) ne comportent que des inconnues d'exposant 1.
- **Résoudre une inéquation à une inconnue**, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnues pour lesquelles l'inégalité est vraie. Ce sont **les solutions de l'inéquation**.

Exemple : $2x + 3 < x + 10$ et $-5y + 8 \geq 3y + 2$ sont des inéquations.

Propriété – Addition et inégalité
a, b et c désignent trois nombres relatifs.

- Si $a \leq b$
  alors $a + c \leq b + c$.

↳ Lorsque l'on **ajoute** un même nombre aux deux membres d'une inégalité, alors on **conserve** l'ordre de cette inégalité.

Remarque : soustraire à un nombre a un nombre c, c'est ajouter à a le nombre $-c$. On a : $a - c = a + (-c)$.

Exemple : $x + 3 \geq -7$
Alors $x + 3 + (-3) \geq -7 + (-3)$
Donc $x \geq -10$.

Propriété – Multiplication et inégalité
a, b et c désignent trois nombres relatifs.

- Si $a \leq b$, et $c > 0$
  alors $a \times c \leq b \times c$.

- Si $a \leq b$, et $c < 0$
  alors $a \times c \geq b \times c$.

↳ Lorsque l'on multiplie un même nombre non nul les deux membres d'une inégalité :

- Si ce nombre est **positif**, alors on **conserve** l'ordre de cette inégalité.
- Si ce nombre est **négatif**, alors on **inverse** l'ordre de cette inégalité.

Remarque : diviser un nombre a par un nombre non nul c, c'est multiplier a par $\frac{1}{c}$. On a : $\frac{a}{c} = a \times \frac{1}{c}$.

Exemples :

- $3x \leq 4$

Alors $\frac{1}{3} \times 3x \leq \frac{1}{3} \times 4$ ici $\frac{1}{3}$ étant positif, l'ordre est conservé.
Donc $x \leq \frac{4}{3}$.

- $-\frac{1}{5}x < 2$

Alors $2 \times (-5) < -\frac{1}{5}x \times (-5)$ ici -5 étant négatif, l'ordre est inversé.
donc $-10 < x$
Donc $x > -10$.

II – Représentation des solutions d’une inéquation

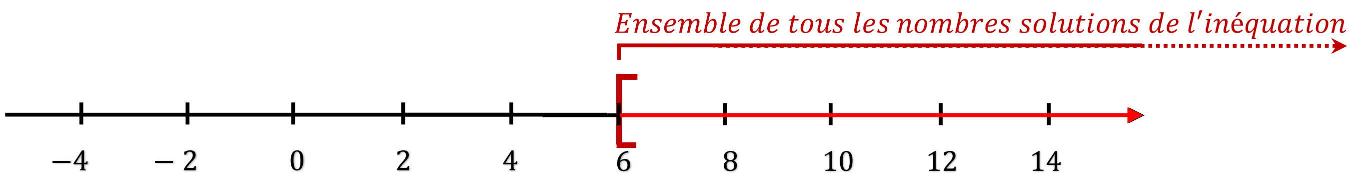
Exemple : résolvons l’inéquation $2x + 5 \leq 4x - 7$.

- On soustrait $4x$ à chaque membre de l’inéquation :
$$2x + 5 - 4x \leq 4x - 7 - 4x$$
- On réduit chacun des membres de l’inéquation :
$$-2x + 5 \leq -7$$
- On soustrait 5 à chacun des membres de l’inéquation :
$$-2x + 5 - 5 \leq -7 - 5$$
- On réduit chacun des membres de l’inéquation :
$$-2x \leq -12$$
- On divise chacun des membres de l’inéquation (par un nombre **négatif** donc on n’oublie pas d’**inverser** l’ordre) :
$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{6}{-2}$$
- On réduit chacun des membres de l’inéquation :
$$x \geq 6$$

Toutes les inéquations successivement obtenues ont les mêmes solutions.

Les solutions de l’inéquation $2x + 5 \leq 4x - 7$ sont $x \geq 6$, $i.e.$ ***tous les nombres supérieurs ou égaux à*** $\mathbf{6}$.

On peut représenter ces solutions sur une droite graduée : c’est la partie colorée en rouge sur la droite ci-dessous, valeur sur crochet **inclue**.



Remarque : La notation de l’ensemble de ces solutions (qui sera reprise en classe de seconde) est : $\boldsymbol{S} = [\mathbf{6}; +\infty[$.

Exemple : résolvons l’inéquation $4x + 1 > 5x + 2$.

On a : $4x + 1 > 5x + 2$

donc $4x + 1 - 4x > 5x + 2 - 4x$

donc $1 > x + 2$

donc $1 - 2 > x + 2 - 2$

donc $-1 > x$

Donc $x < -1$.

Les solutions de l’inéquation $4x + 1 > 5x + 2$ sont $x < -1$, $i.e.$ ***tous les nombres strictement inférieurs*** $\mathbf{-1}$.

On peut représenter ces solutions sur une droite graduée : c’est la partie colorée en rouge sur la droite ci-dessous, valeur sur crochet **exclue**.