

Objectifs

- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité.
- Calculer des probabilités dans des contextes familiers.

I – Expérience aléatoire

Définition : une expérience est **aléatoire** lorsqu'elle vérifie deux conditions :

- On connaît les **issues** (i.e. les résultats possibles) ;
- Le résultat n'est pas prévisible.

Exemple 1 : Expérience de LA ROUE DE LOTERIE

On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On fait tourner la roue de loterie ci-contre.
- On note le secteur désigné par la flèche une fois la roue arrêtée.



Cette expérience aléatoire admet quatre issues : Rouge n°1 ; Rouge n°2 ; Vert n°2 ; Jaune n°4.

Les **issues sont connues**, le **résultat du lancer n'est pas prévisible**. Il s'agit donc d'une expérience aléatoire.

Remarque : chaque résultat d'une expérience aléatoire ne dépend pas des résultats des expériences réalisées précédemment.

Définition : un **évènement** est une condition qui, selon l'issue de l'expérience aléatoire, est réalisée ou ne l'est pas.

Exemple : dans l'expérience de LA ROUE

↳ L'évènement « Obtenir le nombre 2 » est réalisé par deux issues : Vert n°2 et Rouge n°2.

Remarque : un évènement est réalisé par aucune, par une ou par plusieurs issue(s) de l'expérience.

Définition : un **évènement élémentaire** est un évènement qui ne peut être réalisé que par une seule issue.

Exemple : dans l'expérience de LA ROUE

↳ L'évènement « Obtenir la couleur jaune » est réalisé par une seule issue : Jaune n°4.

Définitions :

- un évènement qui se réalise nécessairement est un **évènement certain**.
- un évènement qui ne peut pas se réaliser est un **évènement impossible**.

Exemple : dans l'expérience de LA ROUE

↳ L'évènement « Obtenir un nombre positif » est réalisé par toutes les issues, c'est évènement certain.

↳ L'évènement « Obtenir la couleur bleue » n'est réalisé par aucune issue, c'est un évènement impossible.

II – Probabilité d'un évènement

1) – Définition et propriétés

Définition : Lorsque l'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence à laquelle se réalise un évènement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité** de cet évènement.

Exemple 2 : Expérience du LANCER DE DE – On réalise l'expérience aléatoire suivante :

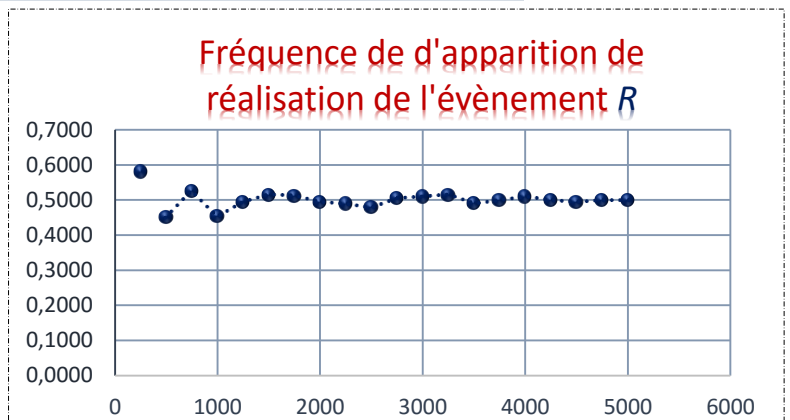


- On lance un dé équilibré à six faces.
- On note le nombre inscrit sur la face supérieure.

On note R l'évènement « Obtenir un nombre pair ».
Le graphique ci-contre indique la fréquence à laquelle se réalise cet évènement en fonction du nombre de lancers.

On remarque expérimentalement que, pour un très grand nombre de lancers, cette fréquence se rapproche de 50 %.

Ainsi, la probabilité de l'évènement R est égale à 0,5.



Notation : on note $P(R)$ la probabilité de l'évènement R . On écrit alors $P(R) = 0,5$.

Propriétés :

- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- La probabilité d'un évènement impossible est nulle.
- La probabilité d'un évènement certain est égale à 1.
- La somme des probabilités d'obtenir chaque issue est égale à 1.

2) – Cas d'équiprobabilité

Définitions :

Pour une expérience aléatoire, lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

Exemple : dans l'expérience du LANCER DE DE

Le dé étant équilibré, chaque nombre la même probabilité d'être obtenu.

Donc, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Propriété : dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement est égale au quotient du nombre d'issues qui réalisent l'évènement par le nombre total d'issue.

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement } A}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Exemple : dans l'expérience du LANCER DE DE

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité qui admet 6 issues.

Donc : $P(\text{Obtenir } 1) = P(\text{Obtenir } 2) = \dots = P(\text{Obtenir } 6) = \frac{1}{6}$.

L'évènement B : « Obtenir un nombre impair » est réalisé par 3 issues : Obtenir 1 ; Obtenir 3 ; Obtenir 5.

Donc : $P(B) = \frac{3}{6}$

← Nombre d'issues qui réalisent l'évènement

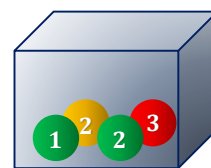
← Nombre total d'issues

III – Evènements incompatibles

Définition : deux évènements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Exemple 3 : Expérience du TIRAGE DANS L'URNE – On réalise l'expérience aléatoire suivante :

- On tire au hasard une boule de l'urne ci-contre.
- On note la couleur et le nombre inscrit sur cette boule.



On considère les évènements :

- A : Tirer une boule Rouge.
- B : Tirer une boule numérotée 2.
- C : Tirer une boule Verte.

Aucune issue ne permet de réaliser à la fois les évènements A et B . Donc, A et B sont incompatibles.

L'issue « Obtenir une boule Verte n°2 » réalise à la fois les évènements B et C . Donc, B et C ne sont pas incompatibles.

Propriété :

Si deux évènements sont incompatibles, alors la probabilité que l'un **ou** l'autre se réalise est égale à la somme des probabilités de ces évènements.

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

Exemple : dans l'expérience du TIRAGE DANS L'URNE

Comme les évènements A et B sont incompatibles, on a $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$.

Attention : B et C ne sont pas incompatibles, donc : $P(B \text{ ou } C) \neq P(B) + P(C)$.

Définition et Propriété :

L'évènement **contraire** d'un évènement A se note $\text{non } A$.

L'évènement $\text{non } A$ est réalisé lorsque l'évènement A n'est pas réalisé. On a : $P(\text{non } A) = 1 - P(A)$.

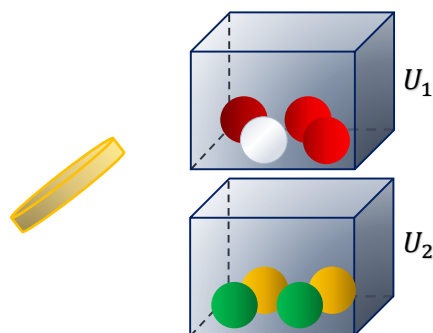
Exemple : dans l'expérience du TIRAGE DANS L'URNE, on considère l'évènement I : « obtenir un nombre Impair ».

L'évènement contraire de I est « ne pas obtenir un nombre Impair », c'est-à-dire $\text{non } I$: « obtenir un nombre pair ».

Ainsi : $P(\text{non } I) = 1 - P(I) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

IV – Expérience à deux épreuves

Exemple 4 : on considère une expérience consistant à lancer une pièce, puis si l'on obtient PILE on tire au hasard une boule d'une urne U_1 mais si on obtient FACE on tire une boule d'une urne U_2 .



Evènements des épreuves de l'expérience

Epreuve 1 : P : « obtenir PILE »

F : « obtenir FACE »

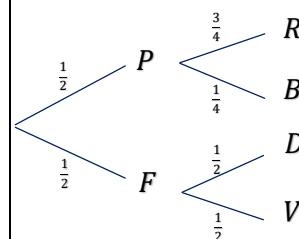
Epreuve 2 : R « tirer une boule Rouge »

B « tirer une boule Blanche »

D « tirer une boule Dorée »

V « tirer une boule Verte »

Arbre pondéré



Propriété :

Dans un arbre pondéré, la probabilité de l'évènement auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Ainsi, pour cette expérience à deux épreuves : $P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.