Chapitre 09 – FONCTIONS LINEAIRES

- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.
- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.
- Représenter graphiquement une fonction linéaire
- Connaître et utiliser la relation $y = ax$ entre les coordonnées (x, y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \longmapsto ax$.
- Lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représenté par une droite.

I – Fonction linéaire et proportionnalité

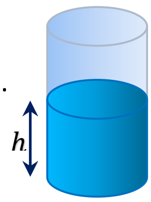
Définition : deux grandeurs sont **proportionnelles** si on peut calculer la valeur de l'une en multipliant la valeur de l'autre par un même nombre. Ce nombre noté $\boldsymbol{a}$ est appelé **coefficient de proportionnalité**.

↳ La fonction f qui traduit cette relation de proportionnalité est la fonction $f : x \longmapsto \boldsymbol{a}x$

Exemples de grandeurs décrivant une situation de proportionnalité :

- La distance d parcourue par un objet de déplaçant à vitesse constante v est calculable par la relation $d = v \times t$. Cette situation est **modélisable** par une fonction d qui au temps t associe le nombre $d(t) = v \times t$.
  Ici, la constante v est le coefficient de proportionnalité liant la grandeur $distance$ et la grandeur $temps$.
  Donc, $\boldsymbol{v}$ est le **coefficient** de la fonction $d : t \longmapsto \boldsymbol{v}t$.

- Le volume V d'eau contenu dans une cuve cylindrique dont l'aire de la base fixe est b et la hauteur qui varie est h est calculable par la relation $V = b \times h$.
  Cette situation est **modélisable** par une fonction V qui à une hauteur h associe le nombre $V(h) = b \times h$.
  Ici, la constante b est le coefficient de proportionnalité liant la grandeur $Volume$ et la grandeur $hauteur$.
  Donc, $\boldsymbol{b}$ est le **coefficient** de la fonction $V : h \longmapsto \boldsymbol{b}h$.



- Le poids P d'un corps plongé dans un champ gravitationnel de constante de pesanteur g est calculable par la relation $P = m \times g$.
  Cette situation est **modélisable** par une fonction P qui à une masse m associe le nombre $P(m) = m \times g$.
  Ici, la constante b est le coefficient de proportionnalité liant la grandeur $Volume$ et la grandeur $hauteur$.
  Donc, $\boldsymbol{g}$ est le **coefficient** de la fonction $P : m \longmapsto m\boldsymbol{g}$.

Définition : une **fonction linéaire de coefficient** $\boldsymbol{a}$ est une fonction qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre $\boldsymbol{a}x$, où a est un nombre donné.

↳ La fonction f qui traduit cette relation de linéarité est la fonction $f : x \longmapsto \boldsymbol{a}x$.

Exemples de fonctions linéaires :

- $f : x \longmapsto \mathbf{3}x$ est une fonction linéaire de coefficient 3.
- $g : x \longmapsto -\mathbf{0,7}x$ est une fonction linéaire de coefficient $-0{,}7$.
- $h : x \longmapsto \frac{x}{\mathbf{2}}$ est une fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{2}$.

Exemple de fonctions non linéaires:

- $f : x \longmapsto \mathbf{3}x^2$ n'est pas une fonction linéaire.

II – Coefficient de fonction linéaire et pourcentage d'augmentation-réduction

Propriétés :

- **Augmenter** un nombre de t %, c'est multiplier ce nombre par $\left(\mathbf{1}+\frac{t}{\mathbf{100}}\right)$
- **Réduire** un nombre de t %, c'est multiplier ce nombre par $\left(\mathbf{1}-\frac{t}{\mathbf{100}}\right)$

Démonstration :

Soit A un nombre, alors, t% de A vaut : $\frac{t}{100}\times A$. Ainsi :

- Le nombre N augmenté de t %, vaut : $N+\frac{t}{100}\times N=N\left(1+\frac{t}{100}\right)$.
- Le nombre N réduire de t %, vaut : $N-\frac{t}{100}\times N=N\left(1-\frac{t}{100}\right)$.

Conséquences :

- Une **augmentation de t %** d'un nombre x se modélise par la **fonction linéaire de coefficient $a=1+\frac{t}{100}$**
  - On la note $f(x)=\left(\mathbf{1}+\frac{t}{\mathbf{100}}\right)x$ ou encore $f:x\longmapsto\left(\mathbf{1}+\frac{t}{\mathbf{100}}\right)x$.
- Une **réduction de t %** d'un nombre x se modélise par la **fonction linéaire de coefficient $a=1-\frac{t}{100}$**
  - On la note $f(x)=\left(\mathbf{1}+\frac{t}{\mathbf{100}}\right)x$ ou encore $f:x\longmapsto\left(\mathbf{1}+\frac{t}{\mathbf{100}}\right)x$.

Exemples :

- Dans un magasin, les prix x de tous les survêtements sont augmentés de 23%.
  - Le coefficient $a=1+\frac{23}{100}=1{,}23$.
  - Le nouveaux prix de chaque survêtement est donc l'image de x par $f:x\longmapsto 1{,}23x$, (ou encore $f(x)=1{,}23x$).
- Dans un zoo, les effectifs x de chaque espèce animale ont été réduis de 5%.
  - Le coefficient $a=1-\frac{5}{100}=0{,}95$.
  - Le nouvel effectif de chaque espèce est donc l'image de x par $f:x\longmapsto 0{,}95x$, (ou encore $f(x)=0{,}95x$).

III – Représentation graphique d'une fonction linéaire

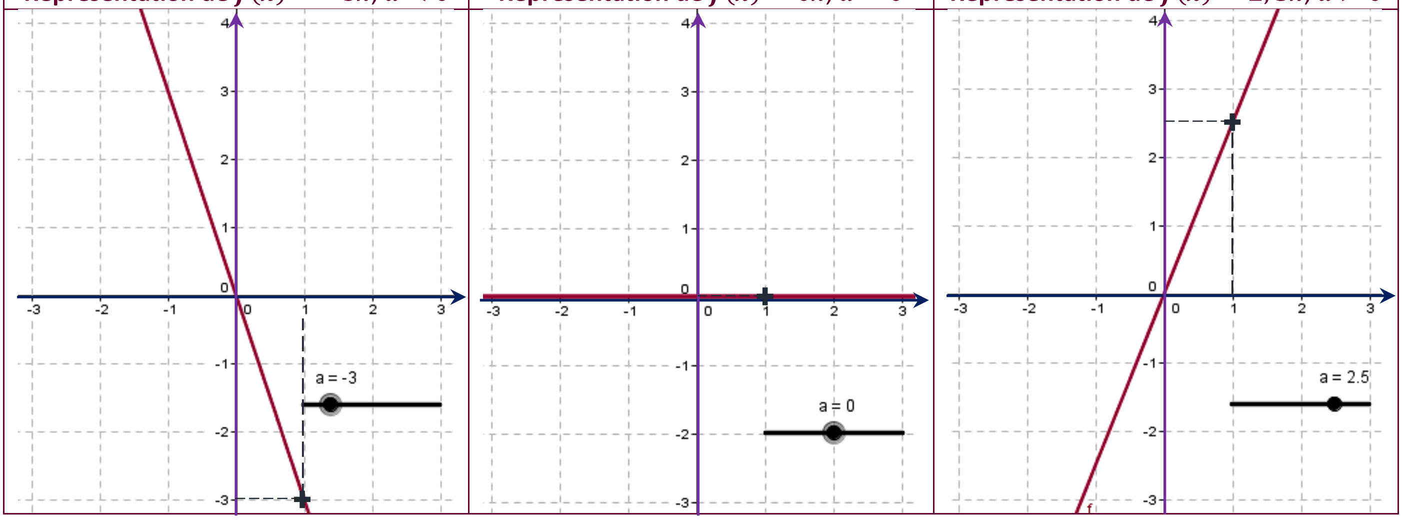
Propriétés – [Admises] :

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire $f(x)=ax$ est une droite qui :

- contient le point O $(0;0)$, origine du repère
- contient le point de coordonnées $(1;a)$

Exemples de représentations :

Représentation de $f(x)=-3x$, $a<0$	Représentation de $f(x)=0x$, $a=0$	Représentation de $f(x)=2{,}5x$, $a>0$



Vocabulaire : le coefficient a de la fonction est aussi appelé pente de la droite ou coefficient directeur de la droite.