Objectifs

↪ Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a et utiliser les égalités :
 $(\sqrt{a})^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$.

↪ Savoir utiliser, sur des exemples numériques, où a et b sont deux nombres positifs, les égalités :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} ; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (b \text{ non nul}).$$

I – Racine carrée d'un nombre positif

Définition

a est un nombre positif. Le nombre positif dont le carré est égal à a est appelé la **racine carrée** du nombre a .
On note ce nombre $\sqrt{a}$.

Remarque : le symbole $\sqrt{\quad}$ est appelé radical.

Exemples

- 3 est un nombre positif et $3^2 = 9$, donc $\sqrt{9} = 3$.
- 5 est un nombre positif et $5^2 = 25$, donc $\sqrt{25} = 5$.
- $\frac{3}{2}$ est un nombre positif et $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, donc $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Cas particuliers : $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$.

Attention ! La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Propriétés

Pour tout nombre a positif :

- $\sqrt{a^2} = a$
- $(\sqrt{a})^2 = a$

Exemples

- $\sqrt{4,51^2} = 4,51$
- $(\sqrt{0,273})^2 = 0,273$

Remarque : la racine carrée d'un nombre peut ne posséder ni écriture décimale exacte, ni écriture fractionnaire.

Exemple $\sqrt{7}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre décimal ou d'une fraction. On peut cependant donner une valeur arrondie de ce nombre : $\sqrt{7} \approx 2,65$ (arrondie au centième).

II – Racine carrée et opérations

Simplification d'écriture

Dans un produit, le symbole $\times$ peut parfois être sous entendu.

Exemple $\sqrt{2} \times 6 = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Propriétés

- Pour tous nombre a et b positifs, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.
- Pour tous nombre a et b positifs, avec $b \neq 0$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Démonstrations

- $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$ et $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$
 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a \times b}$ sont deux nombres positifs qui ont le même carré donc ils sont égaux.
- $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$ et $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}}$ sont deux nombres positifs qui ont le même carré donc ils sont égaux.

Exemples

- $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$
- $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

Attention ! Il n'existe pas d'égalité similaire concernant l'addition ou la soustraction de racines carrées.

Contre - exemples $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$ alors que $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Donc $\sqrt{36} + \sqrt{64} \neq \sqrt{36 + 64}$.