Chapitre 01 - OUTILS DE CALCULS ET PUISSANCES

I – Opération avec des nombres relatifs en écriture décimale

Activité mentale - Nombres relatifs en écriture décimale

1) Donner deux nombres de signes contraires dont la somme est -15.

2) Thalès serait né en 625 avant l'an 0 du calendrier grégorien et serait mort à l'âge de 78 ans. Donner la date supposée de sa mort.

3) Calculer de tête les expressions suivantes :
$A = -3 + 9 - 7 + 11$;
$B = 0{,}75 - 8{,}1 + 1 + 0{,}25 - 1{,}9$.

4) Donner deux nombres entiers relatifs de même signe dont le produit est 12.
Trouver les autres valeurs possibles.

5) Meriem dit pouvoir déterminer le signe de $1 \times (-2) \times 3 \times (-5) \times \ldots \times\ 2015 \times (-2016)$. Est-ce possible ?

6) Jessica affirme que l'inverse de 3 et -3. A-t-elle raison ?

Vocabulaire
-7 est un **nombre relatif**. Son **signe** est $-$ et sa **distance à zéro** est 7.

1 – Somme algébrique

Définition
Une **somme algébrique** est une suite d'additions et de soustractions.

Méthode
Pour calculer une somme algébrique, on peut regrouper les nombres qui ont le même signe.

Exemple :

$$\begin{aligned} A &= 3 - 7 + 9 - 8 + 1 \\ &= 3 + 9 + 1 - 7 - 8 \\ &= 13 - 15 \\ &= -2 \end{aligned}$$

2 – Produit et quotient

Méthode
- Le produit (ou le quotient) de deux nombres de **même signe** est **positif**.
- Le produit (ou le quotient) de deux nombres de **signe contraire** est **négatif**.

Méthode
Pour calculer le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs :
- On utilise la **règle des signes** ;
- On calcule le produit (ou le quotient) des distances à zéro.

Exemples :
- $-8 \times 2 = -(8 \times 2) = -16$
- $-35 \div (-7) = +(35 \div 7) = 5$

II – Opérations avec des nombres relatifs en écriture fractionnaire

Activité mentale - Nombres relatifs en écriture fractionnaire

1) Dans chaque cas suivants, donner le dénominateur commun aux deux fractions, positifs et le plus petit possible.

a) $\frac{1}{3}$ et $-\frac{7}{24}$ b) $\frac{8}{-6}$ et $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{7}{15}$ et $\frac{1}{9}$ d) $\frac{15}{14}$ et $\frac{7}{6}$

2) Dans quel(s) cas est-il nécessaire d'effectuer un ou des changement(s) de dénominateurs ?

$$A = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \qquad B = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \qquad C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \qquad D = \frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$$

3) $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{1}{4} =$

a. $\frac{-3}{3} \div \frac{1}{4}$?

b. $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{1}$?

c. $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{4}{1}$?

4) Calculer :

$$A = \frac{\frac{3}{7}}{9} \qquad B = \frac{3}{\frac{7}{9}}$$

1 – Somme algébrique

Méthode

Si a, b et c sont trois nombres relatifs, avec $b \neq 0$, alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

Exemples :

$$B = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7} \qquad C = \frac{9}{15} - \frac{11}{15} = \frac{9-11}{15} = -\frac{2}{15}$$

2 – Produit

Méthode

Si a, b, c et d sont quatre nombres relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

Exemple :

$$D = \frac{-2}{7} \times \frac{-5}{3} = \frac{-2 \times (-5)}{7 \times 3} = \frac{10}{21}$$

3 – Quotient

Méthode

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.

Cas particuliers : si a, b, c et d sont des nombres relatifs, avec $b \neq 0, c \neq 0$, alors $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemples :

$$E = \frac{-2}{7} \div \frac{-5}{3} = \frac{-2}{7} \times \frac{3}{-5} = \frac{-2 \times 3}{7 \times (-5)} = \frac{-6}{-35} = \frac{6}{35} \qquad F = \frac{3}{\frac{2}{7}} = 3 \times \frac{7}{2} = \frac{3 \times 7}{2} = \frac{21}{2}$$

III – Puissances

Activité – Produit de puissances d'un même nombre

1)

a) Ecrire 3^4 comme un produit de 4 facteurs identiques.

b) De même, écrire 3^5 comme un produit de facteurs identiques.

c) En déduire une écriture de $3^4 \times 3^5$ comme un produit de facteurs identiques.

d) Ecrire alors $3^4 \times 3^5$ sous la forme d'une puissance.

2) Procéder comme dans la question 1) pour écrire $2^4 \times 2^3$ sous la forme d'une puissance.

3) Martin doit écrire $5^{25} \times 5^{36}$ sous la forme d'une puissance de 5.
Que peut-on lui conseiller pour qu'il réponde rapidement ?
Que doit écrire Martin ?

4) Recopier et compléter :

$$3^5 \times 3^{-4} = 3^5 \times \frac{1}{3^{\cdots}} = \frac{\ldots \times \ldots \times \ldots \times \ldots \times \ldots}{\ldots \times \ldots \times \ldots \times \ldots} = 3^{\cdots}$$

5) Ismail doit écrire $5^{25} \times 5^{-36}$ sous la forme d'une puissance de 5.
Que peut-on lui conseiller pour qu'il réponde rapidement ?
Que doit écrire Ismail ?

6) m et n sont des nombres entiers positifs. a est un nombre relatif.
Recopier et compléter :

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a \times a}_{\ldots\, facteurs} \times \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\ldots\, facteurs} = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\ldots\, facteurs} = a^{\cdots}$$

1 – Définitions

- Pour $n \geq 2, a^n = a \times a \times \ldots \times a$, ($n$ facteurs), a^n se lit « a puissance n » ou « a exposant n ».
- Par convention, $a^1 = a$ et $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$.
- Pour $n \geq 1$ et $a \neq 0$, a^{-n} est l'inverse de a^n. On a donc $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples :

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
- $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$.
- $(-5)^0 = 1$ et $(-3)^1 = -3$.
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

2 – Propriétés – [Démontrées en activité]

Si a et b sont deux nombres relatifs non nuls, et n et m deux entiers relatifs, alors :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$.
- $a^n \times b^n = (ab)^n$.
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Exemples :

- $7^{15} \times 7^{23} = 7^{15+23} = 7^{38}$
- $\frac{2^{24}}{2^{13}} = 2^{24-13} = 2^{11}$
- $(3^2)^7 = 3^{2 \times 7} = 3^{14}$
- $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1\,000$
- $\frac{9^{12}}{1{,}5^{12}} = \left(\frac{9}{1{,}5}\right)^{12} = 6^{12}$

$5^3 \times 5^{-4} = 5^{3+(-4)} = 5^{-1}$

$\frac{7^{17}}{7^{-8}} = 7^{17-(-8)} = 7^{17+8} = 7^{25}$

$(11^5)^{-2} = 11^{5 \times (-2)} = 11^{-10}$

3 – Ecriture scientifique

Définition

L'écriture (ou notation) scientifique d'un nombre est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$ avec :

- $1 \leq a < 10$;
- n un nombre entier relatif.

Exemples :

- L'écriture scientifique de $123\,456{,}7$ est $1{,}234567 \times 10^5$.
- L'écriture scientifique de $0{,}000\,123\,4$ est $1{,}234 \times 10^{-4}$.
- L'écriture scientifique de $12{,}3 \times 10^7$ est $1{,}23 \times 10^8$.

IV – Priorités opératoires

Méthode

Dans un calcul, on effectue dans l'ordre :

1) Les calculs entre parenthèses ;
2) Les puissances ;
3) Les multiplications et les divisions ;
4) Les additions et les soustractions.

Exemple :

$$\begin{aligned} A &= 3 \times \mathbf{(5-3)}^4 + 2 - 5^2 \\ &= 3 \times \mathbf{2^4} + 2 - \mathbf{5^2} \\ &= 3 \times \mathbf{16} + 2 - 25 \\ &= 48 + 2 - 25 \\ &= 25 \end{aligned}$$