<u>Exercice 1</u> – Le Nombre d'or φ

Partie 1 – Définition et fascination

Le Nombre d'or, aussi appelé « la divine proportion » a toujours fasciné les Mathématiciens du monde, il permet entre autre de mesurer la beauté, autant la beauté d'un visage que la beauté d'une création (proportions du corps humain – visage ou membres – proportion entre continents et océans, spirale de l'escargot et autres coquilles, sons, architecture, etc). Il porte l'harmonie du Monde mais reste encore très mystérieux même pour les Mathématiciens. La valeur de ce nombre est :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

a) Donner une valeur arrondie à 10^{-5} près du Nombre d'or.

D'après la calculatrice : $\varphi \simeq 1{,}61803$.

b) Montrer que le Nombre d'or est une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Pour montrer que φ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$, il faut et il suffit de montrer que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.
On a :

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\times 2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi^2 - \varphi - 1 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}-\left(1+\sqrt{5}\right)-2}{2} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}-2}{2} \\
&= \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

c) Montrer que le Nombre d'or est une solution de l'équation $\frac{1}{x} - x + 1 = 0$.

Pour montrer que φ est solution de $\frac{1}{x} - x + 1 = 0$, il faut et il suffit de montrer que $\frac{1}{\varphi} - \varphi + 1 = 0$.
On a :

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2-2\sqrt{5}}{1^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

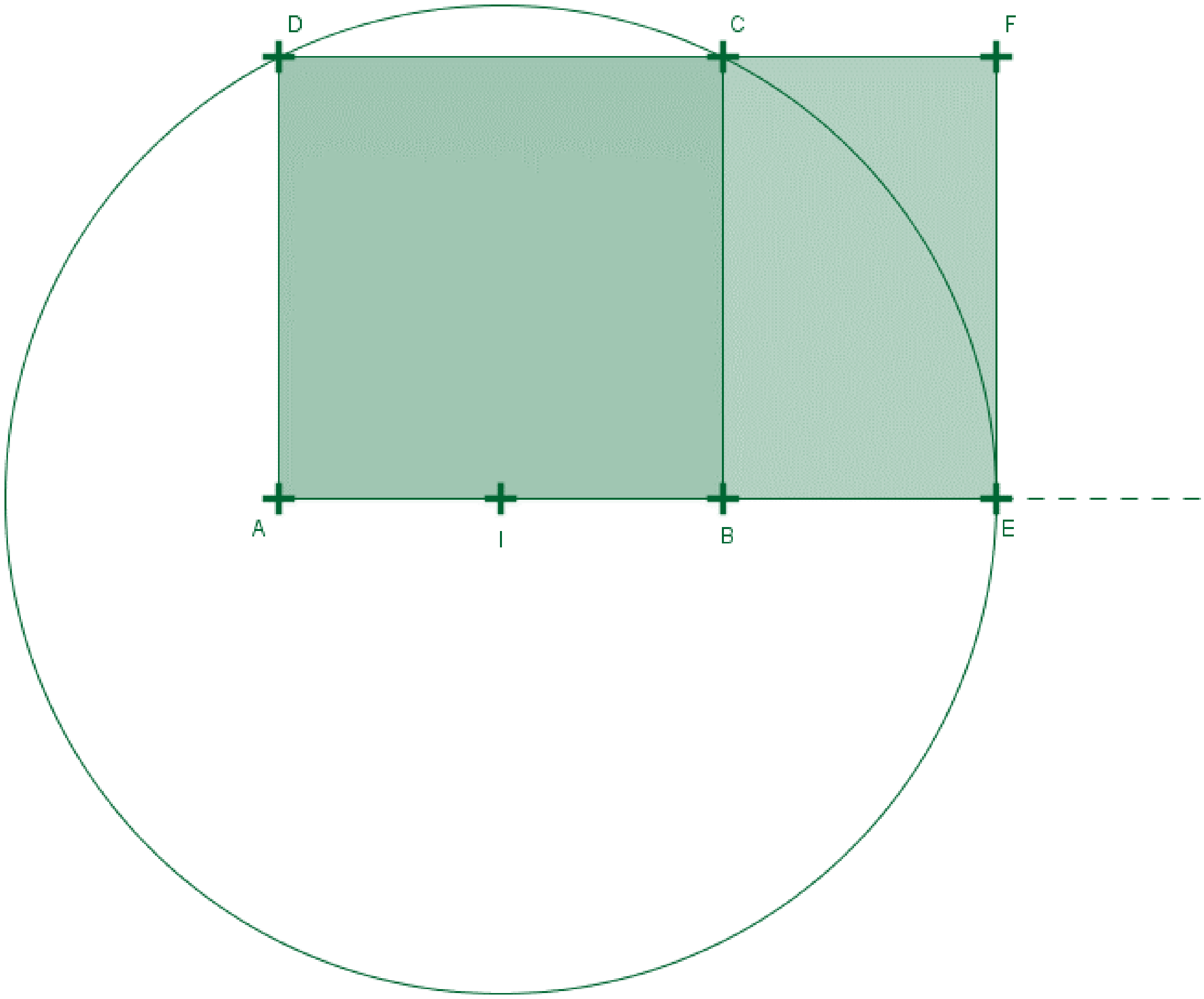
Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} - \varphi + 1 &= -\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} \\
&= \frac{-\left(1-\sqrt{5}\right)-\left(1+\sqrt{5}\right)+2}{2} \\
&= \frac{-1+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}+2}{2} \\
&= \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien solution de l'équation $\frac{1}{x} - x + 1 = 0$.

Partie 2 – Construction géométrique du Nombre d'or

a) Construire un carré $ABCD$ de côté $1\ dm$. On appelle I le milieu de $[AB]$.
b) Tracer le cercle de centre I et de rayon $[IC]$. Ce cercle coupe la demi-droite $[AB)$ en E.
c) Construire le rectangle $AEFD$.



d) Calculer la valeur exacte de la longueur IC puis démontrer que les longueurs AE et DF sont toutes les deux égales au Nombre d'or.

Dans le triangle BIC rectable en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$IC^2 = IB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Donc, $IC = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

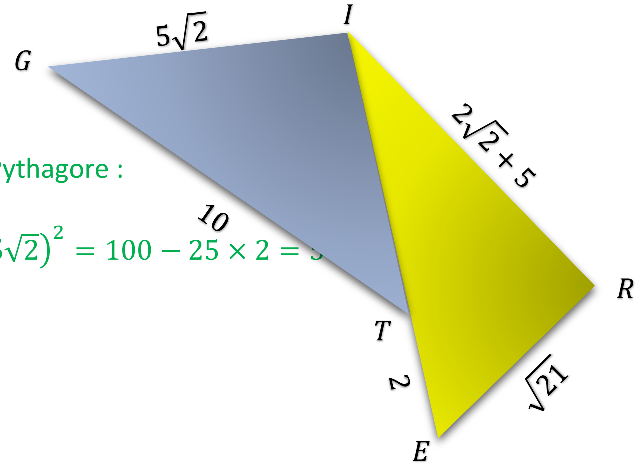
On a alors : $AE = AI + IE = \frac{AB}{2} + IC = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Et $DF = AE = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

P.I. :

- le rectangle $AEFD$ est appelé Rectangle d'or.
  La proportion entre sa longueur et sa largeur est égale au Nombre d'or.
- φ est une lettre grec et se prononce « phi ».

Exercice 2
La figure $GIRET$ est composée de deux triangles. Le triangle TIG et rectangle en I.
Déterminer si le triangle IRE est rectangle ou non.
Toutes les longueurs sont exprimées en $mètres$.



Commençons par déterminer IT :

GIT est rectangle en I, alors d'après le théorème de Pythagore :

$GT^2 = GI^2 + IT^2$ ainsi $IT^2 = GT^2 - GI^2 = 10^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 100 - 25 \times 2 =$
Comme $IT > 0$, alors $IT = \sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

Donc, $IT = 5\sqrt{2}\ cm$.

A présent, calculons SEPAREMENT IE^2 et $IR^2 + RE^2$:

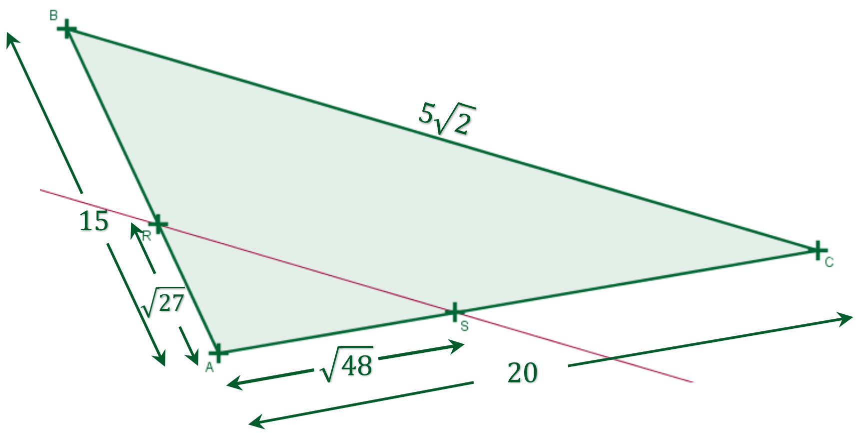
- $IE^2 = (IT + TE)^2 = \left(5\sqrt{2} + 2\right)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 + 2 \times 5\sqrt{2} \times 2 + 2^2 = 25 \times 2 + 20\sqrt{2} + 4 = 54 + 20\sqrt{2}$

- $IR^2 + RE^2 = \left(2\sqrt{2} + 5\right)^2 + \sqrt{21}^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2 \times 2\sqrt{2} \times 5 + 5^2 + 21 = 8 + 20\sqrt{2} + 46 = 54 + 20\sqrt{2}$

On a montré que $IE^2 = IR^2 + RE^2$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IRE est rectangle en R.

Exercice 3
Soit un triangle ABC. Et soient deux points R et S respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$ tels que :
$AB = 15$; $BC = 5\sqrt{2}$; $AR = \sqrt{27}$; $AS = \sqrt{48}$ et $AC = 20$. Toutes les longueurs sont exprimées en cm.

1) Démontrer que les droites (RS) et (BC) sont parallèles.
Commençons par réaliser un figure et reportons-y les données :
(la figure n'a pas besoin d'être construite en vraie grandeur)



- Les points A, R et B d'une part et les points A, S et C d'autre part sont alignés dans cet ordre.
- Calculons et comparons les rapports suivants :
  - $\frac{AR}{AB} = \frac{\sqrt{27}}{15} = \frac{\sqrt{9}\times\sqrt{3}}{15} = \frac{3\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{5}$
  - $\frac{AS}{AC} = \frac{\sqrt{48}}{20} = \frac{\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

Ainsi, en plus de l'alignement des points énoncé plus haut, on a l'égalité $\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AC}$.
Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (RS) et (BC) sont parallèles.

2) En déduire la valeur exacte de RS.
Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A et les droites (RS) et (BC) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès, on a l'égalité : $\frac{RS}{BC} = \frac{AR}{AC}$ qui s'écrit encore $\frac{RS}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{27}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{5}$
Ainsi : $RS = \frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{5} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Donc, $RS = \sqrt{6}\ cm$.