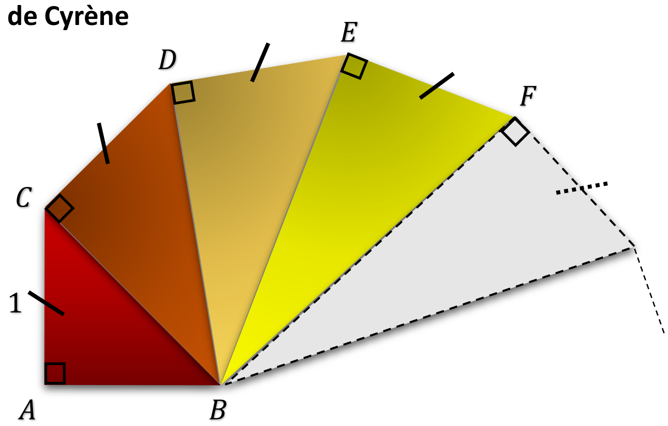
DHC 7 – CALCULS ELEMENTAIRES SUR LES RADICAUX

<u>Exercice 1</u> – La spirale de Théodore de Cyrène

On considère la figure ci-contre



1) Sachant que le triangle ABC est rectangle isocèle en A, calculer la valeur exacte de BC.

Dans le triangle ABC iso rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Donc, $BC = \sqrt{2}$.

2) En déduire les valeurs exactes de DB et EB.

Dans le triangle BCD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$DB^2 = BC^2 + CD^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$

- Donc, $DB = \sqrt{3}$.

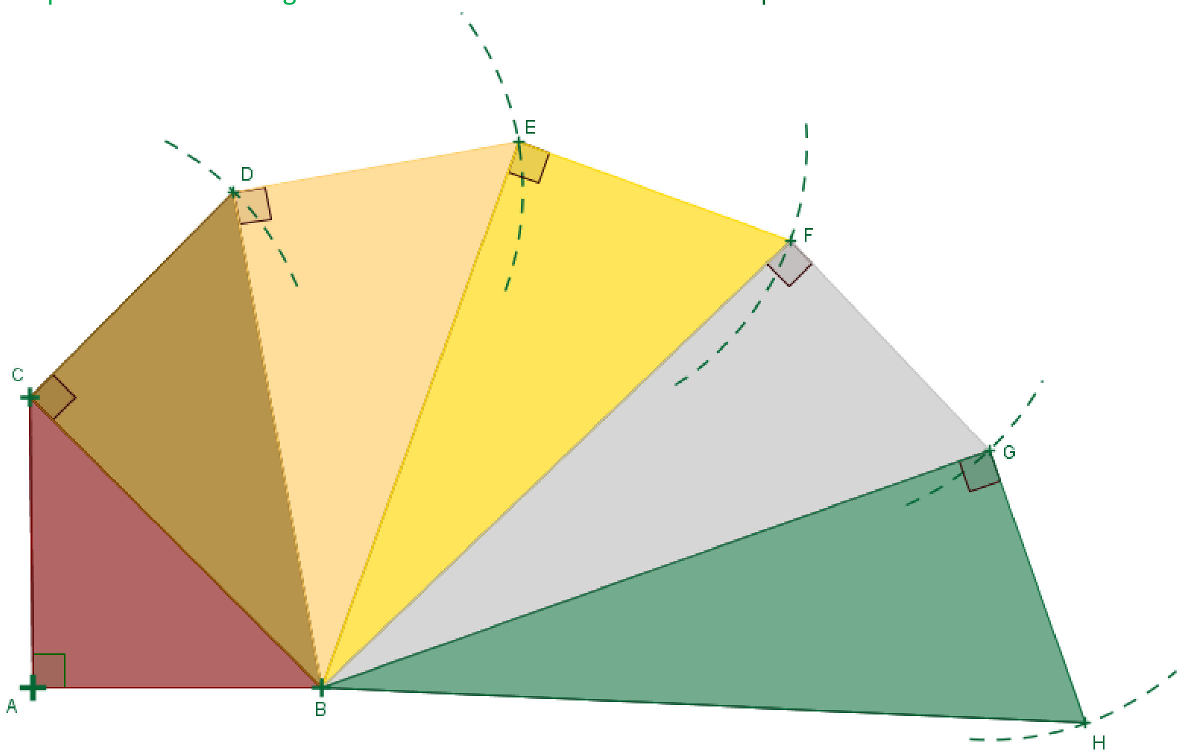
Dans le triangle BCD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$EB^2 = BD^2 + DE^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$

- Donc, $BE = \sqrt{4} = 2$.

3) A l'aide de ces résultats, construire un segment de longueur $\sqrt{7}$. Détailler les étapes de construction.

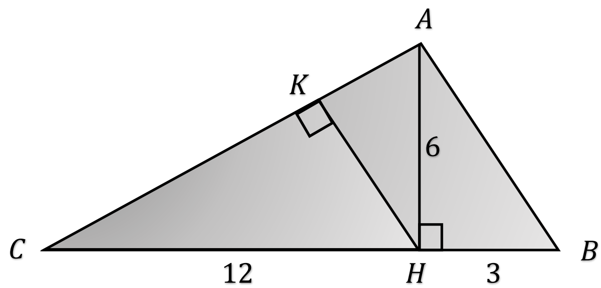
Par itérations successives, on peut vérifier que $BF = \sqrt{5}$, $BG = \sqrt{6}$ puis $BH = \sqrt{7}$. Il s'agit donc de construire le point H tel que BGH soit rectangle en G et $GH = 1$. Ce sera donc notre protocole de construction.



Ainsi, $BH = \sqrt{7}$.

Exercice 2

On considère la figure ci-contre



1) Calculer les valeurs exactes de AC et AB.

Dans le triangle AHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 6^2 + 12^2 = 36 + 144 = 180$

- Donc, $AC = \sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$.

Dans le triangle AHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$

- Donc, $AB = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.

2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Pour ce faire, utilisons la réciproque du théorème de Pythagore :
On a d'une part : $BC^2 = (12 + 3)^2 = 15^2 = 225$
et d'autre part : $AB^2 + AC^2 = 45 + 180 = 225$
Comme $BC^2 = BA^2 + AC^2$, alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

3) Calculer la valeur exacte de KH.

Sachant que $(KH) \perp (AC)$ et que $(AB) \perp (AC)$ alors $(AB)//(KH)$.
De plus, (AC) et (BC) sont sécantes en C, donc d'après le théorème de Thalès :
$\frac{KH}{AB} = \frac{CH}{CB}$ soit encore $\frac{KH}{3\sqrt{5}} = \frac{12}{12+3}$ donc $KH = \frac{12\times3\sqrt{5}}{15} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{12}{\sqrt{5}}$.