DHC 6 – Géométrie et calcul littéral

Exercice 1

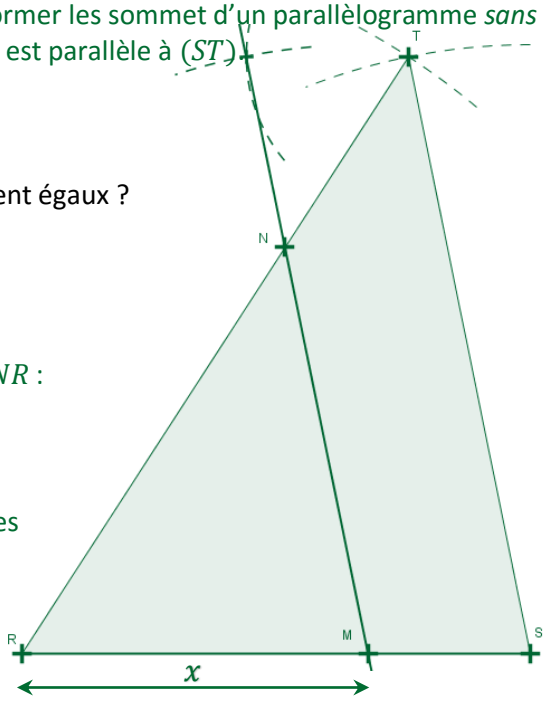
Construire un triangle RST tel que $RS = 10\ cm$; $RT = 14\ cm$ et $ST = 12\ cm$.

Placer un point M sur $[RS]$. On pose $RM = x\ cm$. La parallèle à (ST) passant par M coupe $[RT]$ en N.

Pour tracer (MN) parallèle à (ST), on utiliser le compas de sorte à former les sommet d'un parallèlogramme *sans le tracer*. (MN) porte l'un des côtés de ce parallèlogramme, celui qui est parallèle à (ST).

Exprimer le périmètre du triangle RMN en fonction de x.

Exprimer le périmètre du trapèze $MSTN$ en fonction de x.



Question :

Où faut-il placer le point M pour que les deux périmètres soient égaux ?

- **Exprimons le périmètre de RMN : P_{RMN}**

$$P_{RMN} = RM + MN + NR$$
$$= x + MN + NR$$

Pour poursuivre le calcul, déterminons les longueurs MN et NR :

↳ Calculons MN :

Comme :

- les droites (RT) et (RS) sont sécantes en R
- et que les droites (ST) et (MN)sont parallèles

Alors :

d'après le théorème de Thalès, on a l'égalité $\frac{MN}{ST} = \frac{RM}{RS}$ soit encore : $\frac{MN}{12} = \frac{x}{10}$

Donc :

$$MN = \frac{12x}{10} = 1{,}2x$$

↳ Calculons NR :

Comme :

- les droites (RT) et (RS) sont sécantes en R
- et que les droites (ST) et (MN)sont parallèles

Alors :

d'après le théorème de Thalès, on a l'égalité $\frac{RN}{RT} = \frac{RM}{RS}$ soit encore : $\frac{RN}{14} = \frac{x}{10}$

Donc :

$$NR = \frac{14x}{10} = 1{,}4x$$

Ainsi, $\boldsymbol{P_{RMN} = x + 1{,}2x + 1{,}4x = 3{,}6x}$.

- **Exprimons le périmètre de $MSTN$: P_{MSTN}**

$$P_{MSTN} = MS + ST + TN + NM$$
$$= (RS - RM) + ST + (RT - RN) + NM$$
$$= 10 - x + 12 + 14 - 1{,}4x + 1{,}2x$$
$$= 10 + 12 + 14 - x - 1{,}4x + 1{,}2x$$
$$= 36 - 1{,}2x$$

Ainsi, $\boldsymbol{P_{MSTN} = 36 - 1{,}2x}$.

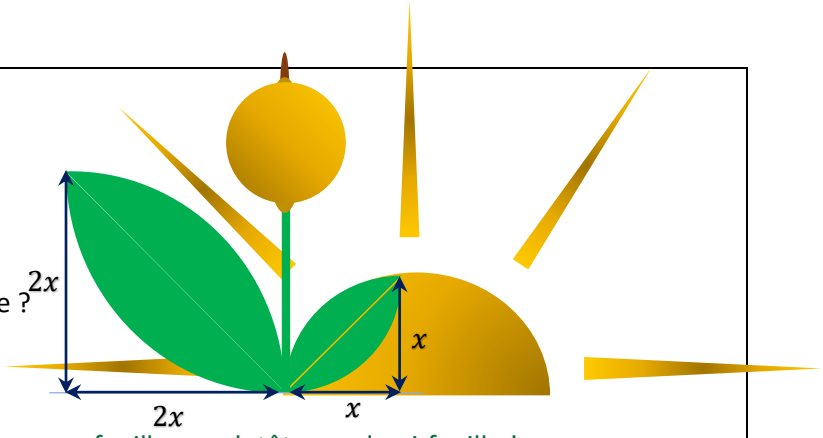
Répondons maintenant à la question :

Les deux périmètre sont égaux pour x tel que $3{,}6x = 36 - 1{,}2x$, ou encore $3{,}6x + 1{,}2x = 36$ ou encore $4{,}8x = 36$, ou encore $x = \frac{36}{4{,}8} = 7{,}5$.

Ainsi, pour que les deux périmètre soient égaux, il faut placer Msur $[RS]$ à une distance $x = 7{,}5\ cm$ de R.

Exercice 2

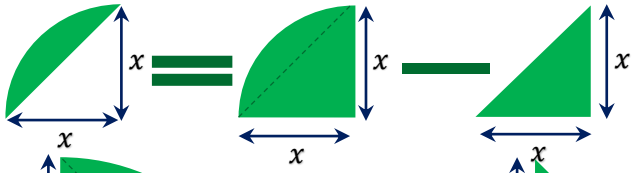
Sur la figure ci-contre, x désigne un nombre positif.
Derrière c'est le soleil.



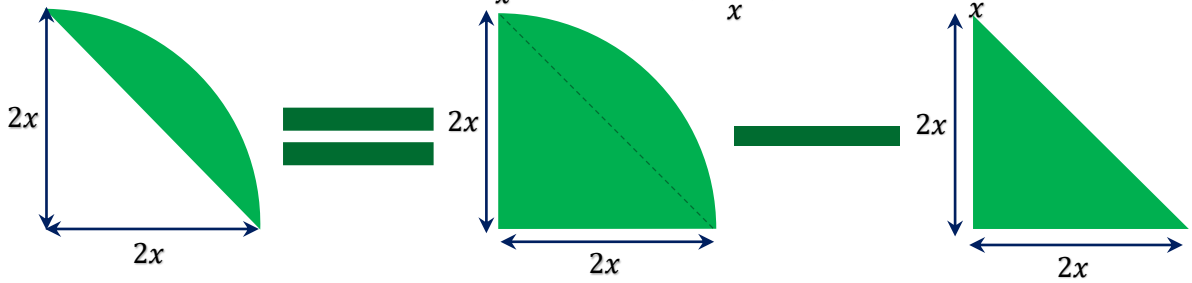
Question :

Quelle est, en fonction de x, l'aire du feuillage ?

Remarquons tout d'abord le forme qui compose une feuille, ou plutôt, une demi-feuille !
Pour schématiser grossièrement, on a :



De la même manière :



Ainsi pour calculer l'aire de chaque demi-feuille il faut retrancher à l'aire d'un quart de disque (d'où le soleil) celle d'un triangle rectangle isocèle dont la longueur des deux côtés égaux est égale au rayon du quart de disque considéré.

Procédons donc par étapes :

- Exprimons l'aire de chaque quart de disque :
  - Quart de disque de rayon $r = x$

$$A_{Quart\ de\ petit\ disque} = \frac{1}{4} \times \pi r^2$$

Donc, $\boldsymbol{A_{Quart\ de\ petit\ disque} = \frac{1}{4} \times \pi x^2}$

  - Quart de disque de rayon $R = 2x$

$$\begin{aligned} A_{Quart\ de\ grand\ disque} &= \frac{1}{4} \times \pi R^2 \\ &= \frac{1}{4} \times \pi (2x)^2 \\ &= \frac{1}{4} \times 4\pi x^2 \end{aligned}$$

Donc, $\boldsymbol{A_{Quart\ de\ grand\ disque} = \pi x^2}$

- Exprimons l'aire de chaque triangle isocèle rectangle :
  - Triangle inscrit dans le quart de disque de rayon x

$$\begin{aligned} A_{triangle} &= \frac{base \times hauteur}{2} \\ &= \frac{x \times x}{2} \end{aligned}$$

Donc, $\boldsymbol{A_{petit\ triangle} = \frac{x^2}{2}}$.

  - Triangle inscrit dans le quart de disque de rayon $2x$

$$\begin{aligned} A_{triangle} &= \frac{BASE \times HAUTEUR}{2} \\ &= \frac{2x \times 2x}{2} \end{aligned}$$

Donc, $\boldsymbol{A_{GRAND\ TRIANGLE} = 2x^2}$.

Ainsi, l'aire du feuillage s'obtient simplement en retranchant aux aires des quarts de disques celles des triangles correspondant, puis en multipliant cette nouvelle aire par 2.

$$A_{feuillage} = 2 \times \left[\frac{1}{4}\pi x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \pi x^2 - 2x^2\right] = 2 \times \frac{5\pi x^2 - 6x^2}{4} = \frac{5\pi x^2 - 6x^2}{2} = \frac{5}{2}\pi x^2 - 3x^2 = x^2\left(\frac{5}{2}\pi - 3\right).$$