DIPLOME NATIONAL DU BREVET

CORRECTION DE LA PREPARATION POUR LA **SESSION 2016**

Epreuve de :

MATHEMATIQUES

SERIE GENERALE

Durée de l'épreuve : **2h00**   *Coefficient* : **2**

Le candidat répond sur une copie modèle Education Nationale.

Ce sujet comporte **3** pages numérotées de **1/3** à **3/3**

Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet et qu'il correspond à votre série.

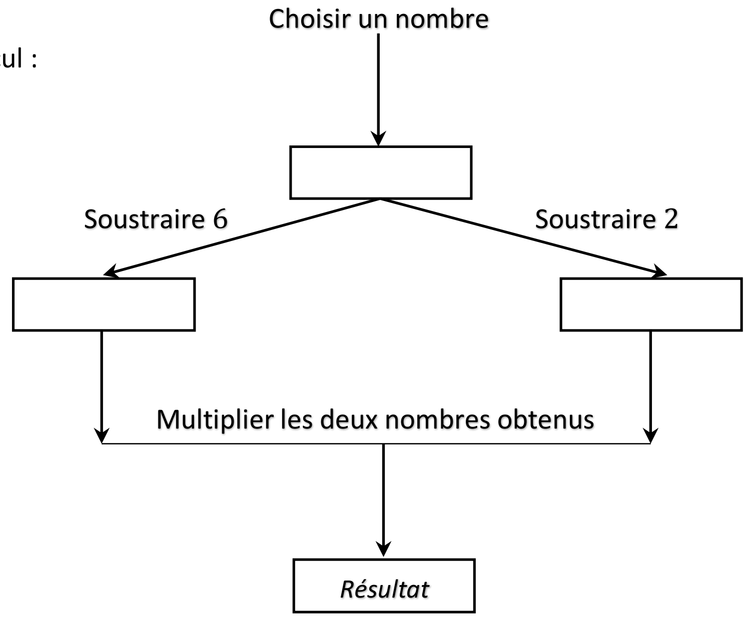
L'utilisation de la calculatrice est autorisée (*circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999*).

L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé.

EXERCICES	THEMES	BAREME
Exercice n°1	Nombres et calculs – *Programme de calculs*	**5 points**
Exercice n°2	Géométrie – *Théorème de Thalès*	**5 points**
Exercice n°3	Nombres et calculs – *Calcul littéral*	**4 points**
Exercice n°4	Nombres et calculs – *Puissances*	**3 points**
Exercice n°5	Géométrie – *Réciproque du théorème de Thalès*	**8 points**
Exercice n°6	Géométrie – *Théorème de Thalès*	**7 points**
Exercice n°7	Géométrie – *Théorème de Thalès*	**4 points**
Maîtrise de langue	Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté et de justifications clairement formulées.	**4 points**

Exercice 1 : (5 points)

Voici un programme de calcul :



1) Montrer que si on choisit 8 comme nombre de départ, le programme donne 12 comme résultat.

- On choisit $\mathbf{8}$,
- On soustrait 6 d'une part et on obtient $\mathbf{2}$; on soustrait 2 d'autre part et on obtient $\mathbf{6}$,
- On multiplie ces deux nombres et on **obtient** $\mathbf{12}$.

2) Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

Proposition 1 : Le programme peut donner un résultat négatif.

- Choisissons 3 comme nombre de départ (pour obtenir un nombre négatif en soustrayant 6, mais un nombre positif en soustrayant 2),
- On soustrait 6 d'une part et on obtient $\mathbf{-3}$; on soustrait 2 d'autre part et on obtient $\mathbf{1}$,
- On multiplie ces deux nombres et on **obtient** $\mathbf{-3}$.

Cette proposition 1 est donc fausse.

Proposition 2 : Si on choisit $\frac{1}{2}$ comme nombre de départ, le programme donne $\frac{33}{4}$ comme résultat.

- Choisissons $\frac{1}{2}$ comme nombre de départ,
- On soustrait 6 d'une part : $\frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{2} - \frac{12}{2} = -\frac{11}{2}$ et on obtient $-\mathbf{\frac{11}{2}}$;

  on soustrait 2 d'autre part : $\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$ et on obtient $-\mathbf{\frac{3}{2}}$,
- On multiplie ces deux nombres : $-\frac{11}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{33}{4}$ et **on obtient** $\mathbf{\frac{33}{4}}$.

Cette proposition 2 est donc vraie.

Proposition 3 : Le programme donne 0 comme résultat pour exactement deux nombres.

Pour obtenir 0, il faut qu'à l'étape où l'on multiplie les deux nombre obtenus, l'un de ces deux nombres doit valoir 0 (puisque $0 \times un\ nombre = 0$ et $un\ nombre\ \times 0 = 0$).

On se demande donc à quel nombre il faut soustraire 6 pour obtenir 0 d'une part et à quel nombre il faut soustraire 2 pour obtenir 0 d'autre part.

Et bien c'est très simple, il s'agit de 6 et de 2, puisque $6 - 6 = 0$ et $2 - 2 = 0$!

Il n'y a que ces deux nombres, donc cette proposition 3 est donc vraie.

Proposition 4 : Si on choisit x comme nombre de départ, le résultat obtenu par le programme est

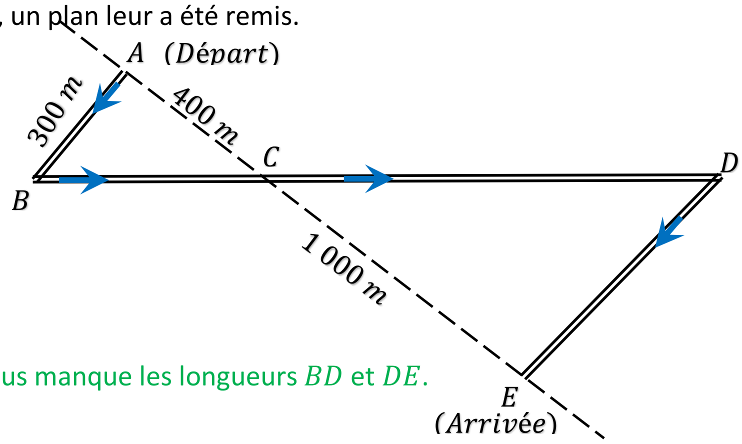
$$x^2 - 8x + 12.$$

- Choisissons x comme nombre de départ,
- On soustrait 6 d'une part et on obtient $\boldsymbol{x - 6}$; on soustrait 2 d'autre part et on obtient $\boldsymbol{x - 2}$,
- On multiplie ces deux nombres :$(x - 6)(x - 2) = x^2 - 2x - 6x + 12$ et on **obtient** $\boldsymbol{x^2 - 8x + 12}$.

Cette proposition 4 est donc vraie.

Exercice 2 : **(5 points)**

Des élèves participent à une course à pied. Avant l'épreuve, un plan leur a été remis.
Il est représenté par la figure ci-contre.



On convient que :

- Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.
- Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
- ABC est un triangle rectangle en A.

Calculer la longueur réelle du parcours $ABCDE$.

Pour connaître la longueur réelle du parcours $ABCDE$, il nous manque les longueurs BD et DE.
Déterminons donc ces longueurs.

➪ Commençons par la longueur BD :
Pour déterminer cette longueur, il nous faut déterminer les longueurs $\boldsymbol{BC}$ et $\boldsymbol{CD}$.

- **Recherche de BC :**
  Sachant que ABC est un triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on peut écrire :
  $BC^2 = AB^2 + AC^2$
  $= 300^2 + 400^2$
  $= 90\ 000 + 160\ 000$
  $= 250\ 000$
  Ainsi, $BC = \sqrt{250\ 000} = 500$, donc $\boxed{\boldsymbol{BC = 500\ m.}}$

- **Recherche de CD :**
  Sachant que (AE) et (BD) se coupent en C et que (AB) et (DE) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on peut écrire :
  $\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE}$ soit encore : $\frac{500}{CD} = \frac{400}{1\ 000}$ et en utilisant le produit en croix, on écrit :

$$CD \times 400 = 500 \times 1\ 000$$

$$\frac{CD \times 400}{400} = \frac{500 \times 1\ 000}{400}$$

$$CD = \frac{5 \times 10^2 \times 1 \times 10^3}{4 \times 10^2} = \frac{5 \times 1 \times 10^2 \times 10^3}{4 \times 10^2} = \frac{5 \times 10^5}{4 \times 10^2}$$

$$= \frac{5}{4} \times 10^{5-2} = \frac{5}{4} \times 10^3 = 1{,}25 \times 10^3 = 1\ 250$$

  Donc $\boxed{\boldsymbol{CD = 1\ 250\ m.}}$
  On peut maintenant calculer la longueur BD :

$$BD = BC + CD = 500 + 1\ 250 = 1\ 750$$

  Donc, $\boldsymbol{BD = 1750\ m}$.

➪ Continuons avec la longueur DE :

- **Recherche de DE :**
  Sachant que (AE) et (BD) se coupent en C et que (AB) et (DE) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on peut écrire : $\frac{CA}{CE} = \frac{BA}{DE}$ soit encore $\frac{400}{1\ 000} = \frac{300}{DE}$.
  Et avec le produit en croix on écrit : $4000 \times DE = 1\ 000 \times 300$

$$\frac{400 \times DE}{400} = \frac{1\ 000 \times 300}{400}$$

$$DE = \frac{300\ 000}{400} = \frac{3\ 000}{4} = 750$$

Donc, $\boxed{\boldsymbol{DE = 750\ m.}}$

<u>Exercice 3 :</u> (4 points)

1) Développer et réduire l'expression : $P = (x + 12)(x + 2)$.

$P = x \times x + x \times 2 + 12 \times x + 12 \times 2$

$= x^2 + 2x + 12x + 24$

$= \mathbf{x^2 + 14x + 24.}$

2) Factoriser l'expression : $Q = (x + 7)^2 - 25$.

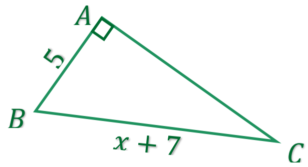
$Q = (x + 7)^2 - 5^2$

$= \big((x + 7) - 5\big)\big((x + 7) + 5\big)$

$= (x + 7 - 5)(x + 7 + 5)$

$= \mathbf{(x + 2)(x + 12).}$

3) ABC est un triangle rectangle en A et x désigne un nombre positif. On donne $BC = x + 7$ et $AB = 5$.
Faire un schéma et montrer que : $AC^2 = x^2 + 14x + 24$.



Le triangle ABC étant rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on écrit :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

Isolons AC^2(puisque nous cherchons à calculer AC^2) en retranchant BA^2 au deux membres de l'égalité

$$BC^2 - BA^2 = BA^2 + AC^2 - BA^2$$

On obtient donc $BC^2 - AC^2 = AC^2$.

Ce qui eut aussi s'écrire :

$AC^2 = BC^2 - AC^2$

$= (x + 7)^2 - 5^2$

$= Q$ (puisque d'après la question précédente : $Q = (x + 7)^2 - 5^2$)

$= P$ (puisqu'on a montré que : $Q = (x + 2)(x + 12) = P = x^2 + 14x + 24$ d'après la question 1)

$= x^2 + 14x + 24$

<u>Remarque</u> : on pouvait aussi développer puis réduire directement $(x + 7)^2 - 5^2$ à l'aide des identités remarquables).

<u>Exercice 4 :</u> (3 points)

1) Donner, en justifiant, l'écriture scientifique les nombres suivants :

$A = 0{,}000\,000\,000\,03$ $= \mathbf{3 \times 10^{-11}}$	$B = 58\,300\,000\,000$ $= \mathbf{5{,}83 \times 10^{10}}$	$C = 6{,}2 \times 10^{25} \times 5 \times 10^{-14}$ $= 6{,}2 \times 5 \times 10^{25} \times 10^{-14}$ $= 31 \times 10^{25+(-14)}$ $= 31 \times 10^{11}$ $= \mathbf{3{,}1 \times 10^{12}}$

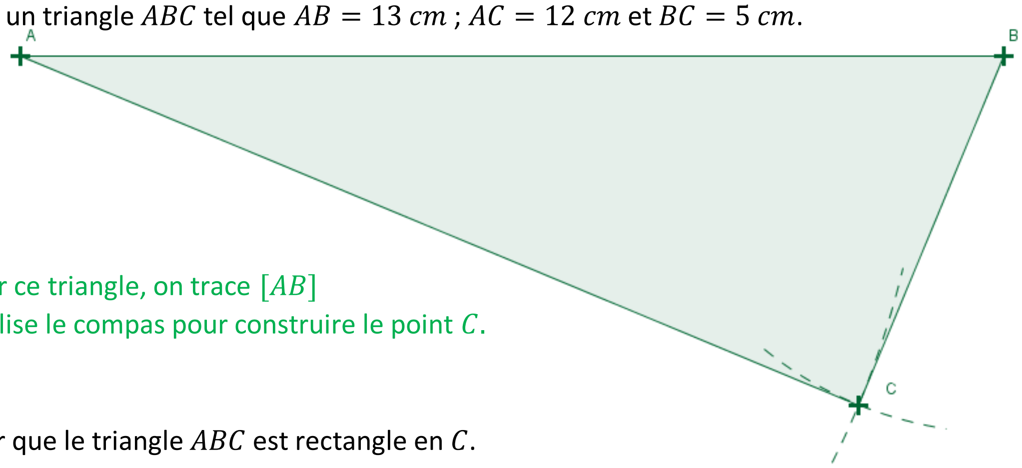
2) Donner, en justifiant, l'écriture décimale des nombres suivants :

$D = \dfrac{12 \times 10^{-9} \times 5 \times (10^2)^3}{24 \times 10^{-2}}$ $= \dfrac{12 \times 5 \times 10^{-9} \times 10^{2\times3}}{2 \times 12 \times 10^{-2}}$ $= \dfrac{5 \times 10^{-9} \times 10^6}{2 \times 10^{-2}}$ $= \dfrac{5}{2} \times 10^{-9} \times 10^6 \times 10^2$ $= 2{,}5 \times 10^{-9+6+2}$ $= 2{,}5 \times 10^{-1}$ $= \mathbf{0{,}25}$	$E = \dfrac{2 \times 10^7 \times 35 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3}}$ $= \dfrac{2 \times 7 \times 5 \times 10^7 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3}}$ $= \dfrac{2 \times 7 \times 10^{7-3}}{10^{-3}}$ $= \dfrac{14 \times 10^4}{10^{-3}}$ $= 14 \times 10^{4-(-3)}$ $= 14 \times 10^7$ $= \mathbf{140\,000\,000}$	$F = \dfrac{3 \times 10^2 \times 5 \times 10^4}{12 \times (10^3)^3}$ $= \dfrac{3 \times 5 \times 10^2 \times 10^4}{3 \times 4 \times 10^{3\times3}}$ $= \dfrac{5 \times 10^{2+4}}{4 \times 10^9}$ $= \dfrac{5}{4} \times 10^{6-9}$ $= 1{,}25 \times 10^{-3}$ $= \mathbf{0{,}00125}$

Exercice 5 : **(8 points)**

Vous ferez la figure sur votre copie en suivant les indications de l'énoncé.

1) Construire un triangle ABC tel que $AB = 13\ cm$; $AC = 12\ cm$ et $BC = 5\ cm$.



Pour tracer ce triangle, on trace $[AB]$
puis on utilise le compas pour construire le point C.

2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

Pour cette démonstration, nous utilisons la réciproque du théorème de Pythagore en vérifiant la véracité de l'égalité $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

On a $AB^2 = 13^2 = 169$

Et on a $AC^2 + CB^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

Ainsi, l'égalité $AB^2 = AC^2 + CB^2$ est vraie.

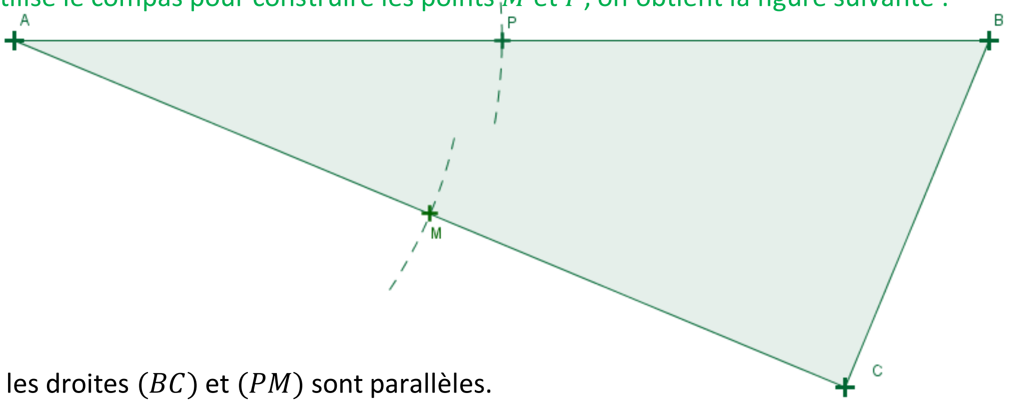
Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, les triangle $\boldsymbol{ABC}$ est rectangle en $\boldsymbol{C}$.

3) Compléter la figure de la question 1 :

a) Construire le point M du segment $[AC]$ tel que $AM = 6\ cm$.

b) Construire le point P du segment $[AB]$ tel que $AP = 6{,}5\ cm$.

On utilise le compas pour construire les points M et P, on obtient la figure suivante :



4) Montrer que les droites (BC) et (PM) sont parallèles.

Pour démontrer que (BC) // (PM), on utilise la réciproque du théorème de Thalès :

Calculons les rapports des longueurs : $\frac{AP}{AB} = \frac{6{,}5}{13} = 0{,}5$ et $\frac{AM}{AC} = \frac{6}{12} = 0{,}5$.

Sachant que $\boldsymbol{A, P, M}$ sont alignés d'une part et $\boldsymbol{A, M, C}$ sont alignés d'autre part et que $\boldsymbol{\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC}}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites $\boldsymbol{(PM)}$ et $\boldsymbol{(BC)}$ sont parallèles.

5) Montrer que $PM = 2{,}5\ cm$.

Sachant que (AB) et (AC) sont sécantes en A et que (PM) et (BC) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante :

$\frac{PM}{BC} = \frac{AM}{AC}$ soit encore $\frac{PM}{5} = \frac{6}{12}$ ce qui donne en utilisant un produit en croix : $PM \times 12 = 5 \times 6$ on divise les deux membres de l'égalité par 12 et on a : $PM = \frac{5\times 6}{12} = \frac{5\times 6}{2\times 6} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

A donc montré que $\boldsymbol{PM = 2{,}5\ cm}$.

6) **Dans cette question**, parmi les quatre propositions suivantes, recopier sur votre copie celle qui permet de montrer que les droites (PM) et (AC) sont perpendiculaires :

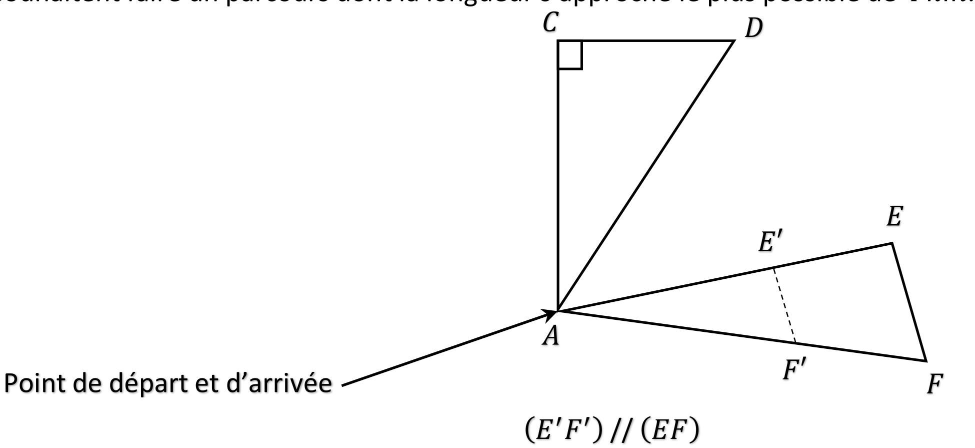
- Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
- **Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.**
  Comme $\boldsymbol{(PM)}$ // $\boldsymbol{(BC)}$ et que $\boldsymbol{(BC) \perp (AC)}$ alors $\boldsymbol{(PM) \perp (AC)}$.
- Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment.

Exercice 6 : **(7 points)**

Une commune souhaite aménager des parcours de santé sur son territoire. On fait deux propositions au conseil municipal, schématisés ci-dessous :

- Le parcours $ACDA$
- Le parcours $AEFA$

Ils souhaitent faire un parcours dont la longueur s'approche le plus possible de 4 km.



$AC = 1{,}4\ km$

$CD = 1{,}05\ km$

$AE' = 0{,}5\ km$

$AE = 1{,}3\ km$

$AF = 1{,}6\ km$

$E'F' = 0{,}4\ km$

$(E'F')\,//\,(EF)$

L'angle $\hat{A}$ dans le triangle AEF vaut 30°

Peux-tu les aider à choisir le parcours ? Justifier.

Attention : la figure proposée au conseil municipal n'est pas à l'échelle, mais les codages et les dimensions données sont correctes.

Pour les aider à choisir le parcours, nous devons déterminer les longueurs des parcours $ACDA$ et $AEFA$ en calculant les périmètres des triangles ACD et AEF.

- Calcul du périmètre de ACD : on le notera P_{ACD}

  Pour calculer P_{ACD}, nous avons besoin de AD, et pour calculer AD nous appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ACD rectangle en C, et on écrit :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 \\ &= 1{,}4^2 + 1{,}05^2 \\ &= 1{,}96 + 1{,}1025 \\ &= 3{,}0625 \end{aligned}$$

  Donc $AD = \sqrt{3{,}0625} = 1{,}75.$

  Ainsi : $P_{ACD} = AC + CD + AD = 1{,}4 + 1{,}05 + 1{,}75 = 4{,}2\ km.$

- Calcul du périmètre de AEF : on le notera P_{AEF}

  Pour calculer P_{AEF}, nous avons besoin de EF, et pour calculer EF nous utilisons le théorème de Thalès puisque (AE) et (AF) sont sécantes en A et que $(E'F')$ et (EF) sont parallèles, et on écrit :

  $\frac{E'F'}{EF} = \frac{AE'}{AE}$ soit encore $\frac{0{,}4}{EF} = \frac{0{,}5}{1{,}3}$ et en utilisant le produit en croix, on écrit $0{,}4 \times 1{,}3 = EF \times 0{,}5$ et en divisant les deux membres de l'égalité par 0,5, on obtient :

  $\frac{0{,}4\times1{,}3}{0{,}5} = EF$ que l'on peut encore écrire $EF = \frac{0{,}4\times1{,}3}{0{,}5} = 1{,}04.$

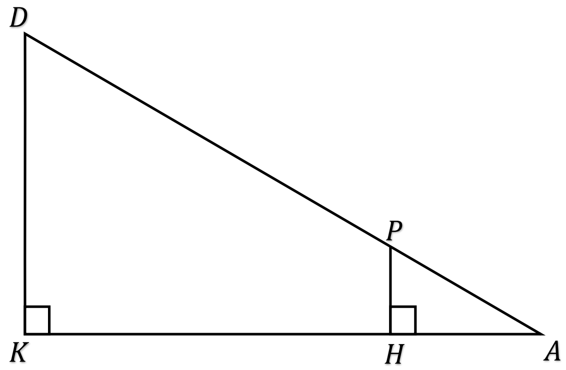
  Ainsi : $P_{AEF} = AE + EF + FA = 1{,}3 + 1{,}04 + 1{,}6 = 3{,}94\ km.$

<u>Conclusion</u> : le parcours $AEFA$ est plus proche de 4 km que le parcours $ACDA$ puisque :
$P_{ACD} - 4 = 0{,}2$ (soit 200 m d'écart), alors que $2 - P_{AEF} = 0{,}06$ (soit 60 m d'écart).

On choisit le parcours AEF.

Exercice 7 : **(4 points)**

Dans la figure ci-contre, qui n'est pas à l'échelle :



- Les points D, P et A sont alignés ;
- Les points K, H et A sont alignés ;
- $DA = 60\ cm$;
- $DK = 11\ cm$;
- $DP = 45\ cm$.

1) Calculer KA au millimètre près.

Le triangle ADK est rectangle en K, alors d'après le théorème de Pythagore :

$$AD^2 = AK^2 + KD^2$$
$$AD^2 - KD^2 = AK^2 + KD^2 - KD^2$$
$$AD^2 - KD^2 = AK^2$$

Que l' on peut aussi écrire $AK^2 = AD^2 - KD^2 = 60^2 - 11^2 = 3\,600 - 121 = 3\,479$

Donc, $\boldsymbol{AK} = \sqrt{3\,479}\ cm$ (valeur exacte)

$\simeq \mathbf{59{,}0}\ \boldsymbol{cm}$ (**valeur arrondie au millimètre près**).

2) Calculer HP.

On sait que (DK) et (PH) sont perpendiculaires à la même droite (KA), donc (DK) et (PH) sont parallèles entre elles. De plus, les droites (AD) et (AK) sont sécantes en A.

Alors, d'après le théorème de Thalès, on a l'égalité :

$$\frac{AP}{AD} = \frac{PH}{DK} \text{ soit encore } \frac{AD - DP}{AD} = \frac{PH}{DK} \text{ soit encore } \frac{60 - 45}{60} = \frac{PH}{11}$$
$$\text{soit encore } \frac{15}{60} = \frac{PH}{11}$$

En utilisant le produit en croix, on écrit :

$$15 \times 11 = PH \times 60$$

Donc :

$$\boldsymbol{PH} = \frac{\mathbf{15 \times 11}}{\mathbf{60}} = \frac{\mathbf{165}}{\mathbf{60}} = \mathbf{2{,}75}\ \boldsymbol{cm}.$$