

Exercice 1 Algorithmique

On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Ajouter 1
- Calculer le carré du résultat obtenu
- Soustraire le carré du nombre de départ
- Soustraire 1

1) Effectuer ce programme lorsque le nombre choisi est 10, puis lorsqu'il est égal à -6 .

↪ Exécution de l'algorithme avec le nombre 10

- On choisit 10
- On ajoute 1, on obtient 11
- On élève 11 au carré, on obtient 121
- On soustrait le carré de 10, c'est-à-dire 100 et on obtient 21
- On soustrait 1 et on obtient 20.

↪ Exécution de l'algorithme avec le nombre -6

- On choisit -6
- On ajoute 1, on obtient -5
- On élève -5 au carré, on obtient 25
- On soustrait le carré de -6 , c'est-à-dire 36 et on obtient -11
- On soustrait 1 et on obtient -12 .

2) Quelle conjecture peut-on faire à propos du résultat fourni par ce programme de calcul ?

On remarque que l'algorithme donne le double du nombre choisit.

On peut donc conjecturer que l'algorithme multiplie le nombre de départ par 2.

Démontrer cette conjecture.

Pour démontrer cette conjecture, désignons par x le nombre choisit et montrons que l'algorithme nous permet d'obtenir $2x$, (soit le double de x).

Reprenons donc l'algorithme :

- Choisir un nombre : x
- Ajouter 1 : $x + 1$
- Calculer le carré du résultat obtenu : $(x + 1)^2$
- Soustraire le carré du nombre de départ : $(x + 1)^2 - x^2$
- Soustraire 1 : $(x + 1)^2 - x^2 - 1$

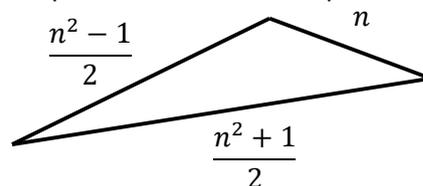
Calculons alors l'expression obtenue

$$\begin{aligned} & (x + 1)^2 - x^2 - 1 \\ &= x^2 + 2x + 1 - x^2 - 1 \\ &= 2x \rightarrow C.Q.F.D. \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère le triangle ABC ci-contre.

Démontrer que ce triangle est rectangle quel que soit le nombre n supérieur à 1.



Utilisons la réciproque du théorème de Pythagore.

On a : $\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = \frac{(n^2)^2 + 2n^2 + 1}{4} = \frac{n^4 + 2n^2 + 1}{4}$

Et $\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 + n^2 = \frac{(n^2)^2 - 2n^2 + 1}{4} + n^2 = \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{4} + \frac{4n^2}{4} = \frac{n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^2 + 1}{4}$

On remarque que : $\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 + n^2$

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle est rectangle pour tout nombre $n \geq 1$.