

Correction du DHC 17

Préparation DNB 2016

BAREME

Exercice 01 – [5pts]

Exercice 03 – [4pts]

Exercice 05 – [4pts]

Exercice 07 – [7pts]

Exercice 02 – [4pts]

Exercice 04 – [4pts]

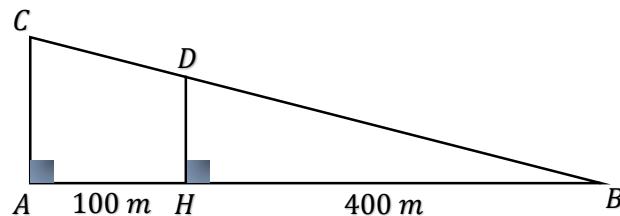
Exercice 06 – [5pts]

Exercice 08 – [7pts]

Exercice 01 – Cyclisme

Un cycliste se trouve sur un chemin $[CB]$. On donne :

- $AH = 100 \text{ m}$
- $HB = 400 \text{ m}$
- $\widehat{ABC} = 10^\circ$



1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$.

ABC est un triangle rectangle en A donc $\widehat{BCA}$ et $\widehat{ABC}$ sont complémentaires.

Ainsi, $\widehat{BCA} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$.

2. Calculer le dénivelé AC arrondi au mètre.

Dans le triangle ABC rectangle en A , on a : $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$ soit encore $\tan 10^\circ = \frac{AC}{500}$.

Donc, $AC = 500 \times \tan 10^\circ \simeq 88 \text{ m}$.

3. Calculer la longueur BC arrondie au mètre.

Comme $H \in [AB]$ et $D \in [BC]$, alors $\widehat{HBD} = \widehat{ABC} = 10^\circ$.

Dans le triangle ABC rectangle en A , on a : $\cos \widehat{HBD} = \frac{HB}{BD}$ soit encore $\cos 10^\circ = \frac{400}{BD}$.

Donc, $BD = \frac{400}{\cos 10^\circ} \simeq 406 \text{ m}$.

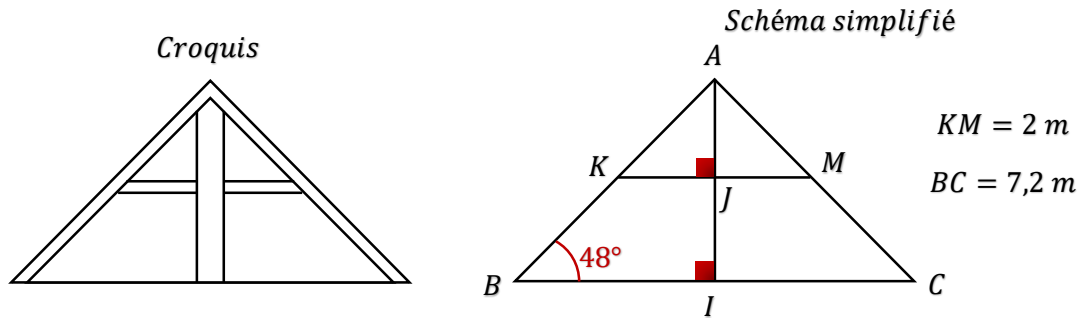
4. Le cycliste est arrêté au point D sur le chemin. Calculer la distance DB arrondie au mètre qu'il lui reste à parcourir.

Dans le triangle DBH rectangle en H , on a : $\cos \widehat{HBD} = \frac{HB}{BD}$ soit encore $\cos 10^\circ = \frac{400}{BD}$.

Donc, $BD = \frac{400}{\cos 10^\circ} \simeq 406 \text{ m}$.

Exercice 02 – Architecture

Un architecte bâtit un grenier. Voici son croquis.



Cet architecte mesurant $1,75\text{ m}$ souhaite savoir s'il peut rester debout sans se cogner la tête sur une des poutres représentée par le segment $[KM]$. I est le milieu du segment $[BC]$.

1. Calculer la longueur du segment $[AI]$. On donnera une valeur approchée par défaut au centimètre près.

Dans le triangle BIA rectangle en A , on a : $\tan \widehat{AB I} = \frac{AI}{BI}$ soit encore $\tan 48^\circ = \frac{AI}{3,6}$
Donc, $AI = 3,6 \times \tan 48^\circ \simeq 4,00\text{ m}$.

2. Calculer la longueur AJ . On donnera une valeur approchée par excès au centimètre près.

Montrons que J est milieu de $[KM]$:

On sait que I est milieu de $[BC]$, $[BI] \perp [AI]$ donc (AI) est la médiatrice de $[BC]$.

De plus, $(KM) \parallel (BC)$ et $J \in [AI]$, on en déduit que (AJ) est la médiatrice de $[KM]$.

Donc, J est milieu de $[KM]$.

Ainsi : $KJ = \frac{KM}{2} = 1\text{ m}$.

On sait que $(KJ) \perp (AI)$ et $(BI) \perp (AI)$ donc $(KJ) \parallel (BI)$. De plus (AB) et (AI) sont sécantes en A , donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AJ}{AI} = \frac{KJ}{BI}$$

Soit encore $\frac{AJ}{4} = \frac{1}{3,6}$ donc $AJ = \frac{4 \times 1}{3,6} \simeq 1,11\text{ m}$.

3. L'architecte peut-il se tenir debout sans se cogner la tête ?

L'architecte mesure $1,75\text{ m} > 1,11\text{ m}$.

Donc, l'architecte ne pourra pas se tenir debout sans se cogner la tête.

Exercice 03 – Démarche de raisonnement

La famille Brain est composée des parents et de 4 enfants.

On sait que :

- Le second enfant de la famille a 4 *ans* de moins que l'aîné ;
- Le second enfant de la famille a 4 *ans* de plus que le troisième ;
- L'âge de l'enfant le plus jeune de la famille Brain est égal à 20 % de l'âge de l'avant-dernier ;
- La somme des âges des 4 enfants est égale à 44 *ans*.

Quels sont les âges de chacun des 4 enfants ?

Soit x l'âge de l'aîné des enfants de la famille Brain. Alors :

- Le second enfant de la famille a $x - 4$ *ans*.
- Le troisième enfant de la famille a $(x - 4) - 4 = x - 8$ *ans*.
- Le quatrième enfant de la famille (l'enfant le plus jeune) a $\frac{20}{100} \times (x - 8) = 0,2x - 1,6$
- $x + (x - 4) + (x - 8) + (0,2x - 1,6) = 44$

On a ainsi : $3,2x - 13,6 = 44$ soit encore $3,2x = 44 + 13,6$ donc $x = \frac{44+13,6}{3,2} = 18$ *ans*.

Ainsi : L'aîné a 18 *ans*, le second a 14 *ans*, le troisième a 10 *ans* et le quatrième a 0,4 *ans*.

Exercice 04 – Interférences constructives et interférences destructives

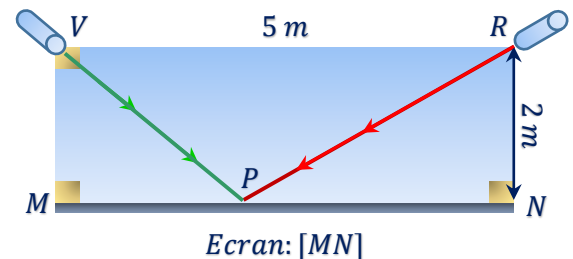
Pour une expérience, on utilise deux laser *Vert* et *Rouge*, pour éclairer un point P sur un écran.

Pour mener à bien l'expérience, il faut que l'angle $\widehat{RPV}$ soit droit.

Le procédé est représenté ci-contre.

On pose $MP = x$.

Le but de cet exercice est de déterminer où doit être placé le point P sur l'écran $[MN]$ pour que RPV soit rectangle en P .



1. Ecrire en fonction de x l'expression des longueurs parcourues par les deux rayons laser.

Le triangle VMP est rectangle en M , donc d'après le théorème de Pythagore :

$$VP^2 = VM^2 + MP^2$$

$$VP^2 = 2^2 + x^2$$

Or, VP est une longueur, donc $VP > 0$ donc : $VP = \sqrt{4 + x^2}$.

De la même manière, le triangle RPN est rectangle en N , donc d'après le théorème de Pythagore :

$$RP^2 = PN^2 + RN^2$$

$$RP^2 = 2^2 + (5 - x)^2$$

$$= x^2 - 10x + 29$$

Or, RP est une longueur, donc $RP > 0$ donc : $RP = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$.

2. A quelle condition sur les longueurs des côtés du triangle VPR , le triangle VPR est-il rectangle ?
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, les triangle VPR est rectangle si $VR^2 = VP^2 + PR^2$.
3. Exprimer VP^2 , puis PR^2 en fonction de x .
D'après la question 1., $VP^2 = 4 + x^2$ et $RP^2 = x^2 - 10x + 29$.
4. Modéliser alors le problème par une équation.
D'après 2. et 3., on a $5^2 = (4 + x^2) + (x^2 - 10x + 29)$.

5.

- a) Montrer que cette équation peut s'écrire $2x^2 - 10x + 8 = 0$.

On a : $5^2 = 4 + x^2 + x^2 - 10x + 29$ soit encore $25 = 2x^2 - 10x + 33$ donc $0 = 2x^2 - 10x + 33 - 25$

Donc : $2x^2 - 10x + 8 = 0$

- b) Développer l'expression $P = 2(x - 1)(x - 4)$. On a : $P = 2x^2 - 10x + 8$ par distributivité.

- c) En déduire une nouvelle écriture de l'équation obtenue à la question 4.

Donc, l'équation obtenue en 4. peut s'écrire : $2(x - 1)(x - 4) = 0$.

En déduire les positions possible du point P .

L'équation : $2(x - 1)(x - 4) = 0$ est une équation produit nul dont les solutions sont $x = 1$ ou $x = 4$.

Donc, P peut être positionné à 1 m ou à 4 m de M sur l'écran $[MN]$.

Exercice 05 – Comparer les salaires des hommes et des femmes

Les informations suivantes concernent les salaires des hommes et des femmes d'une même entreprise.

Salaires des femmes :

1 200€ – 1 230€ – 1 250€ – 1 310€ – 1 370€ – 1 400€ – 1 440€ – 1 500€ – 1 700€ – 2 100€

Salaires des hommes :

Effectif total : 20

Moyenne : 1 769€

Etendue : 2 400€

Médiane : 2 000€

Les salaires des hommes sont tous différents.

1. Comparer le salaire moyen des hommes et celui des femmes.

Calculons le salaire moyen des femmes $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \frac{1\,200 + 1\,230 + 1\,250 + 1\,310 + 1\,370 + 1\,400 + 1\,440 + 1\,500 + 1\,700 + 2\,100}{10} = 1\,450 \text{ €}.$$

Le salaire moyen des hommes étant $\bar{h} = 1\,769 \text{ €}$.

Donc, le salaire moyen des hommes est plus élevé que celui des femmes dans cette entreprise.

2. On tire au sort une personne dans l'entreprise. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Il y a 10 femmes et 10 hommes dans cette entreprise, donc un effectif total de 20 personnes.

Ainsi, la probabilité que la personne tirée au sort soit une femme est de $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

3. Le plus bas salaire de l'entreprise est de 1 000€. Quel salaire est le plus élevé ?

L'étendue des salaires est de 2 400€, sachant que le plus bas salaire est de 1 000€, le salaire le plus élevé est de $1\,000 + 2\,400 = 3\,400 \text{ €}$.

4. Dans cette entreprise, combien de personnes gagnent plus de 2 000€ ?

La médiane étant de 2 000€, on en déduit que 50% de l'effectif total gagne plus de 2 000€, donc 10 personnes gagnent plus de 2 000€.

Exercice 06 - Vrai ou faux

1. Deux affirmations sont données ci-dessous.

- **Affirmation 1.** Pour tout nombre a : $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 9$.
- **Affirmation 2.** Augmenter un prix de 20 % puis effectuer une remise de 20 % sur ce nouveau prix revient à redonner à l'article son prix initial.

Pour chacune, indiquer si elle est vraie ou fausse en **argumentant** la réponse.

- Vérification de l'affirmation 1 : $(2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2 \times 2a \times 3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9 \neq 4a^2 + 9$.
Donc, l'affirmation 1 est **fausse** (l'égalité n'est vraie que pour $a = 0$ et $a = -3$, mais pas pour tout nombre a).
- Vérification de l'affirmation 2 : considérons un prix P , si on l'augmente de 20%, le prix devient :

$$P' = \left(1 + \frac{20}{100}\right) \times P = 1,2P$$

Puis réduisons le prix P' de 20%, on obtient le nouveau prix P'' :

$$P'' = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \times P' = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 1,2P = 0,8 \times 1,2P = 0,96P \neq P.$$

Donc, l'affirmation 2 est **fausse**.

2. Deux égalités sont données ci-dessous.

- **Egalité 1 :** $\frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$.
- **Egalité 2 :** $10^5 + 10^{-5} = 10^0$.

Pour chacune, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, écrire les étapes des calculs qui permettent de l'obtenir. Si elle est fausse, la transformer pour qu'elle devienne vraie.

- $\frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{\sqrt{16 \times 2}}{2} = \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Donc : l'égalité est vraie.
- $10^5 > 1$ et $10^{-5} > 0$ donc $10^5 + 10^{-5} > 1$, or $10^0 = 1$ donc l'égalité est fausse.
Pour que l'égalité devienne vraie en la notant ainsi : $10^5 \times 10^{-5} = 10^{5-5} = 10^0$.

Exercice 07 – La loi d’Ohm, une fonction linéaire

En électricité, la tension U aux bornes d’une « résistance » est proportionnelle à l’intensité I du courant qui la traverse, la loi d’Ohm associée à cette proportionnalité n’est rien d’autre que l’égalité :

$$U = R \times I$$

Où R , la valeur de la résistance, est le coefficient de proportionnalité.

On rappelle que l’unité d’intensité est l’ampère (A) et celle de la tension est le volt (V).

Intensité I (A)	0,02	0,03	0,04	0,08
Tension U (V)	3	4,5	6	12

1.

- a) Vérifier que ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Dans ce tableau, on obtient les valeurs de la deuxième ligne en multipliant celles de la première par 150. Donc, il s’agit bien d’un tableau de proportionnalité.

- b) Quel est le coefficient de proportionnalité ?

Le coefficient de proportionnalité correspond à la valeur de la résistance qu’on peut calculer avec $R = \frac{U}{I}$. Il vaut donc 150.

- c) Calculer la tension U si l’intensité I vaut 0,07 ampère.

U étant une fonction linéaire associant à I la valeur $150I$, on en déduit : si $I = 0,07$ A, alors $U = 150 \times 0,07 = 10,5$ V.

On nomme f la fonction qui donne la tension U en fonction de l’intensité I .

2. Préciser la nature de la fonction f et donner l’expression algébrique de $f(I)$.

La fonction $f: I \mapsto 150 \times I$ est une fonction linéaire.

3. Dans le repère ci-après, tracer la représentation graphique de la fonction f .

Utilisons un tableau de valeurs :

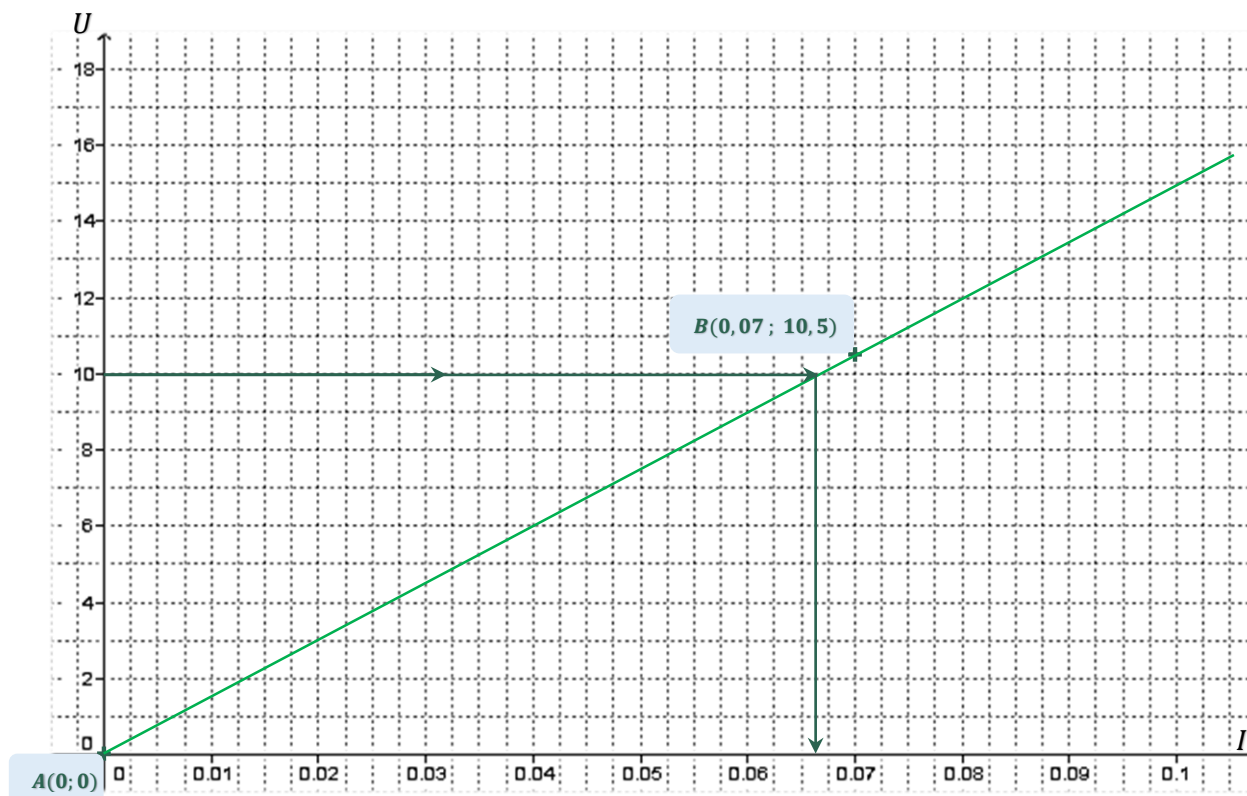
I	0	0,07
$f(I)$	0	10,5

On place donc les points $A(0; 0)$ et $B(0,07; 10,5)$ sur le graphique et on trace la droite représentative de f .

4. Lire graphiquement l’intensité quand $U = 10$ Volts (donner une valeur approchée avec la précision permise par le graphique). Par lecture graphique, si $U = 10$ V alors $I \simeq 0,067$ A.

Déterminer par un calcul la valeur exacte de l’intensité quand $U = 10$ Volts.

Déterminons l’antécédents de 10 par f : on a $150I = 10$ soit encore $I = \frac{10}{150} = \frac{1}{15}$. Donc $I \simeq 0,067$ A.



Exercice 08 – Réduction et recette

Le directeur d'un théâtre sait qu'il reçoit environ 500 spectateurs quand le prix d'une place est de 20€.
Il a constaté que chaque réduction de 1€ du prix d'une place attire 50 spectateurs de plus.

Toutes les parties sont indépendantes.

Première partie

1. Compléter le tableau suivant.

Réduction en euros	Prix de la place en euros	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
0	20	500	$20 \times 500 = 10\,000$
1	19	550	$19 \times 550 = 10\,450$
2	18	600	$18 \times 600 = 10\,800$
4	16	700	$16 \times 700 = 11\,200$

2. On appelle x le montant de la réduction en euros. Compléter le tableau suivant.

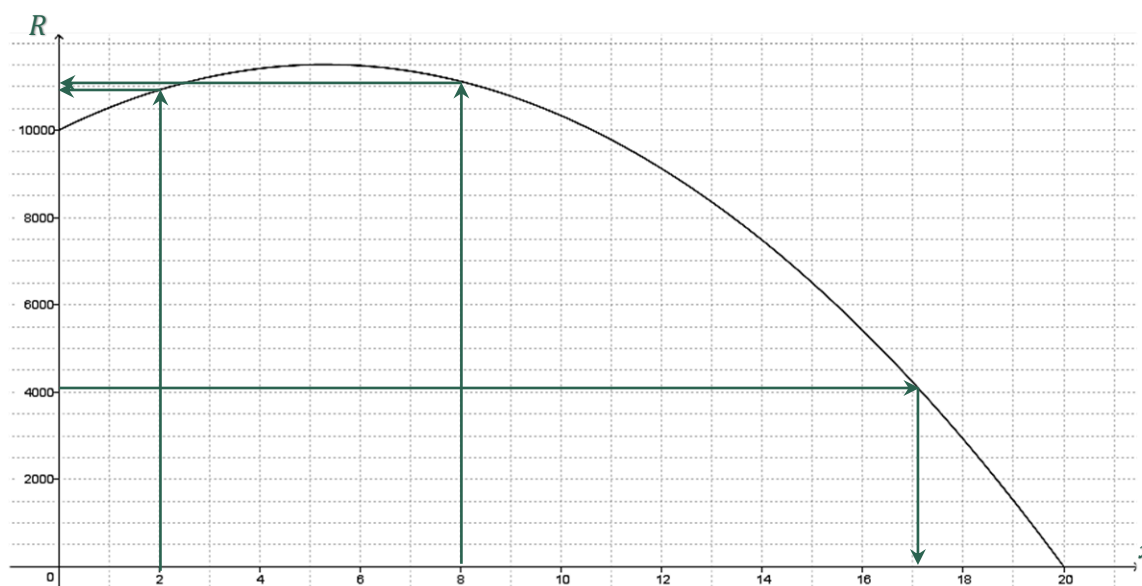
Réduction en euros	Prix de la place en euros	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
x	$20 - x$	$500 + 50x$	$(20 - x) \times (500 + 50x)$

3. Développer l'expression de la recette obtenue à la question 2.

On a : $(20 - x) \times (500 + 50x) = 10\,000 + 1\,000x - 500x - 50x^2 = 10\,000 + 500x - 50x^2$.

Deuxième partie

Le directeur de la salle souhaite déterminer le prix d'une place lui assurant la meilleure recette. Il utilise la fonction R donnant la recette (en euros) en fonction du montant x de la réduction (en euros). Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



1. Quelle est la recette pour une réduction de 2€ ?

Par lecture graphique, la recette pour une réduction de 2€ est d'environ 10 800€.

(D'après nos calculs en première partie, la recette exacte est de 10 800€)

2. Quel est le montant de la réduction pour une recette de 4 050€ ? quel est alors le prix d'une place ?

Par lecture graphique, la réduction pour une recette de 4 050€ est d'environ 17,20€.

Le prix d'une place est alors d'environ 2,80€.

3. Quelle est l'image de 8 par la fonction R ? Interpréter ce résultat par rapport au problème étudié.

Par lecture graphique, on a $R(8) \approx 11\,200$ €.

Ainsi, si la remise est de 8€, donc si le prix de la place est de 12€, la recette est d'environ 11 200€.

4. Quelle est la recette maximale ? quel est alors le prix de la place ?

Par lecture graphique, la recette maximale est d'environ 11 500€ pour une réduction d'environ 5,50€.

Le prix de la place est d'environ 14,50€.